الهندسه
النظريه والعمليه

تاليف
عثمان لبيب
مدرس رياضه بالمدرسه الخديويه
و
عبد الواحد حمدى
مدرس رياضه

(مقرر السنه الاولى الثانويه)

موافق لآخر برنامج وضعته نظارة المعارف العموميه

قد تفضل بمراجعته حضرة اسماعيل بك حسنين
ناظر مدرسة المعلمين الخديويه

الطبعه الثانيه سنة ١٩٠٩



الهندسة

النظريه والعمليه

تاليف

عثمان لبيب و عبدالواحد حمدى

مدرس رياضه بالمدرسه الخديويه — مدرس رياضه

(مقرر السنه الاولى الثانويه)

موافق لآخر برنامج وضعته نظارة المعارف العموميه

قد تفضل بمراجعته حضرة اسماعيل بك حسنين

ناظر مدرسة المعلمين الخديويه

الطبعه الثانيه سنة ١٩٠٩

بسم الله الرحمن الرحيم

نحمدك مبدع الكائنات على نعمة العقل ۞ كما نشكرك على هذا الفضل ۞ ونصلّى ونسلّم على رسلك الهادين الى الصراط المستقيم

(وبعد) فهذا كتاب وضعناه فى علم الهندسة ۞ تحرينا فيه كل اسلوب يقربه الى فهم طالبيه ۞ فان جاء وفق ما قصدنا فذلك ما أردنا ۞ فالله نسأل أن يكون له حسن الوقع ۞ وان يعمّ به النفع آمين

البديهيات

١ البديهية - حقيقة واضحة بذاتها مثل

الواحد نصف الاثنين

النار محرقة

الولد ابن أمه

الانسان يسمع باذنيه

الارض تحتنا والسماء فوقنا

٢ الشيآن المساوى كل منهما لشئ واحد يكونان متساويين

٣ الشيآن اللذان ليس أحدهما مساويا للثانى ولا اصغر منه يكونان مختلفين وأولهما اكبر

٤ الكل يساوى مجموع أجزائه

٥ الكل أكبر من جزئه

٦ الشيآن المتساويان { اذا زيد على كل منهما مقدار واحد / " طرح من " " " " / " ضرب كل منهما فى " " / " قسم كل منهما على " " } كان النا تجان متساويين

٧ الشيآن المختلفان { اذا زيد على كل منهما مقدار واحد / " طرح من كل منهما " " / " ضرب كل منهما فى " " / " قسم كل منهما على " " } كان الناتجان مختلفين وناتج الاكبر اكبر

٨ كل ثلاثة أشياء اولها اكبر من الثانى وثانيها اكبر من الثالث يكون اولها اكبر من الثالث " وتوجد بديهيات كثيرة غير ماذكر

تعاريف

٩ الدعوى - كل قول لا يمكن تصديقه الا بدليل كدعوى الطالب معرفة درسه ومعرفة علم الطب وكدعاوى المحاكم

١٠ الدعوى الهندسية قسمان نظرية وعملية

١١ النظرية - حقيقة تثبت صحتها بدليل نظرى (عقلى)

١٢ العملية - حقيقة تتضح بالعمل وباقامة الدليل النظرى على صحة هذا العمل

١٣ الدعوى - لابد ان تشتمل على مفروض ومطلوب

١٤ مفروض الدعوى - المسلمة صحته

١٥ مطلوب الدعوى - ما يراد البرهنة على صحته

١٦ الفرع - حقيقة تستنتج من نظرية أو نظريات تقدمتها

الجسم والسطح والخط والنقطه

١٧ الجسم - مايشغل محلا وله ابعاد ثلاثة طول وعرض وارتفاع وتطلق احيانا لفظة سمك على العرض وعمق على الارتفاع مثل قطعة الطباشير فانها تشغل محلاً فى الفضاء كما تشغل محلا داخل كوب ماء

١٨ السطح - مايتصور نهايةً للجسم وله بعدان طول وعرض فقط

١٩ الخط - مايتصور نهاية للسطح وله بعد واحد وانواعه ثلاثة مستقيم ومنكسر ومنحن

٢٠ المستقيم - هو اقرب بعد بين نقطتين كالشعرة المشدودة وان كانت فى ذاتها جسمًا

٢١ المنكسر - مايتركب من مستقيمين فاكثر ليست على استقامة واحدة

٢٢ المنحنى - ماليس مستقيماً ولا منكسراً

مستقيم

منكسر (شكل ١)

منحن

٢٣ النقطة - مايتصور نهاية للخط وليس لها بعد

الخط - يتركب من جملة نقط

٢٤ الشكل الهندسي - كل صورة ترسم لبيان حقيقة هندسية

٢٥ الشكلان يكونان متساويين متى أمكن انطباق أحدهما على الثاني انطباقا تاماً في جميع أجزائهما

٢٦ الهندسة - علم يبحث فيه عن خواص الاشكال وقياسها

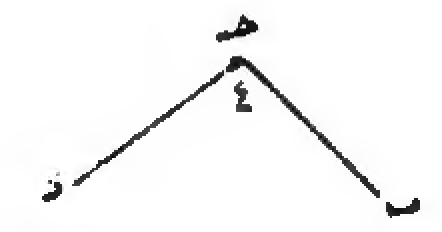
الزوايا

٢٧ الزاوية - هي الانفراج الواقع بين مستقيمين خارجين من نقطة واحدة (ش ٢) وهذه النقطة تسمى رأس الزاوية والمستقيمان يسميان ضلعيها

كيفية قراءة الزاوية

١٨ تقرأ الزاوية بثلاثة أحرف بحيث يكون حرف الرأس في الوسط فيقال زاوية ب ح د أو زاوية د ح ب (ش ٢)

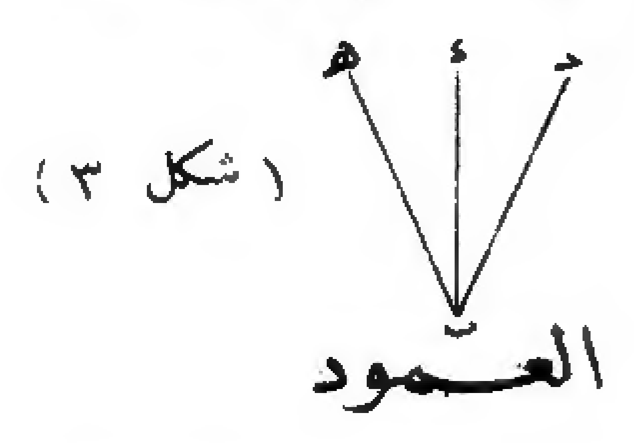
٢٩ وتقرأ أحيانا بحرف الرأس فقط اذا كانت منفرده او برقم داخلها اذا كانت غير ذلك فيقال زاوية ح اوزاوية ٤



٣٠ المستوى - (السطح المستوى) هو ما ليس فيه انخفاض ولا ارتفاع بحيث ينطبق عليه المستقيم تماماً في جميع الجهات مثل

سطح المرآة وسطح الماء الراكد وسطح الحائط الأملس.

٣١ الزاويتان المتجاورتان - هما زاويتان فى مستوٍ واحد على جانبى ضلع مشترك بينهما ورأسهما واحد مثل زاويتى حـ ب د ، د ب هـ



(شكل ٣)

العمود

٣٢ العمود على مستقيم - كل مستقيم يصنع معه زاويتين متجاورتين متساويتين (ش ٤) د حـ عمود على ب هـ لأن زاوية ب حـ د = زاوية د حـ هـ

(شكل ٤)

٣٣ المائل على مستقيم - كل مستقيم يصنع معه زاويتين متجاورتين غير متساويتين

٣٤ الزاوية القائمة - ما كان أحد ضلعيها عموداً على الثانى. مثل زاوية ب حـ د أو زاوية د حـ هـ (ش ٤)

وحدة الزوايا (الدرجة)

قد اصطلحوا على تقسيم القائمة الى تسعين زاوية متساوية كل منها

تسمى درجه

الواحده التى تقدر بها الزوايا هى الدرجه

٣٥ الزاويه الحاده ـ ما كانت اصغر من القائمه (ش ٥)

(شكل ٥)

٣٦ الزاويه المنفرجه ـ ما كانت أكبر من القائمه (ش ٦)

(شكل ٦)

علامات تستعمل للاختصار فى الكتابة

هذه العلامه	$\angle$	يتلفظ بها زاويه
„ „	$\triangle$	„ „ مثلث
„ „	$\perp$	„ „ عمود على
„ „	$\parallel$	„ „ يوازى
„ „	$\#$	„ „ يساوى ويوازى
„ „	ق	„ „ قائمه

تمرينات على البديهيات

١ عمرزيد يعادل عمرخالد امابكر فهواصغرسنامن خالد والمطلوب المقارنه بين عمر زيد وبكر مع ذكر نص البديهيه

٢ ثروة زيد تعادل ثروة خالد وثروة خالد تعادل ثروة بكر والمطلوب المقارنه بين ثروة زيد وبكر مع ذكر نص البديهيه

٣ النقط ا ٥ ب ٥ حـ ٥ ء

ا ب حـ ء

مفروضه على مستقيم واحد بحيث ان ا ب = ب حـ = حـ ء والمطلوب اثبات أن ا حـ = ب ء على شرط أن يكون الاثبات بثلاثة أساليب مختلفه كل اسلوب منها مبنى على بديهيه مغايره للاخرى مع ذكر نص كل بديهيه

٤ اذاكان ا اكبرمن ب ٥ ب أكبرمن حـ فماذا يستنتج من ذلك مع ذكر نص البديهيه

٥ اذافرض مستقيم مثل اب ونصف بنقطه مثل حـ ثم مد على امتداده من جهة ب الى اى نقطه مثل ء فاثبت أن حـ ء = $\frac{\text{ا ء + ب ء}}{٢}$ مع ذكر نص كل بديهيه ترتكن عليها فى الاثبات

٦ المستقيم ا اكبرمن ب والمستقيم ء = حـ والمطلوب مقارنة الفرق بين ا ٥ ء بالفرق بين ب ٥ حـ

٧ اذانصفت الزاويه ب ا حـ بمنصف مثل اء ثم مد من ا أى مستقيم داخل الزاوية مثل اهـ فاثبت ان د ء اهـ = $\frac{\text{د حـ اهـ ـ د ب اهـ}}{٢}$

٣٧ بديهية - الشيآن المختلفان اذا كبر اصغرهما تدريجا مع الاستمرار وصغر اكبرهما كذلك لابد ان يصيرا متساويين

نظريه ١

(شكل ٧)

٣٨ من نقطه مفروضه على مستقيم يمكن اقامة عمود على هذا المستقيم ولا يمكن اقامة غيره

المفروض - نقطة ب على المستقيم حـ د

المطلوب اثباته { (١) يمكن اقامة عمود عليه من هذه النقطه
(٢) لا يمكن اقامة غيره }

برهان (١) - نمد مستقيما حيثما اتفق مثل ب ا يصنع مع حـ ء الزاويتين حـ ب ا ، ا ب ء ولتكن الاولى أصغر من الثانيه ثم نتصور دوران المستقيم ا ب حول نقطة ب في اتجاه السهم فنرى ان الزاويه الصغرى حـ ب ا تأخذ في الكبر شيأ فشيأ والزاويه الكبرى ا ب ء تأخذ في الصغر شيأ فشيأ ومن حيث أن الزاويه الصغرى تكبر والكبرى تصغر فلا بد أن تصيرا متساويتين (٣٧) وحينئذ يأخذ المستقيم ب ا وضعا مثل ب هـ يكون فيه عمودًا على حـ ء (٣٣) وهو المطلوب

برهان (٢) لا يمكن اقامة عمود آخر لان كل مستقيم غير ب هـ مثل ب و لا يصنع مع حـ ء زاويتين متجاورتين متساويتين واذًا لا يكون عمودًا وهو المطلوب

نظريه ٢

٣٩ الزوايا القائمه كلها متساويه

(شكل ٨)

المفروض - د ا ب حـ قائمه

و د ء هـ و قائمه (ش٨)

المطلوب اثبات د ا ب حـ = د ء هـ و

البرهان - نطبق القائمه ا ب حـ على القائمه ء هـ و

بان نطبق أولا ب حـ على هـ و بحيث تقع نقطة ب على هـ

فينطبق ب ا على هـ ء وان لم ينطبق عليه أمكن اقامة عمودين من

نقطة هـ على هـ و وهو خُلف (٣٨) اذن لابد من انطباق ا ب

على هـ ء وتكون د ا ب حـ = د ء هـ و وهو المطلوب

عمليه ١

(شكل ٩)

٤٠ المطلوب اقامة عمود على مستقيم معلوم من نقطه مفروضه عليه

المفروض - مستقيم ا ب ونقطة حـ عليه

المطلوب - اقامة عمود من حـ على ا ب

العمل - نضع رأس القائمه من المثلث القائم الزاويه (أحد آلات الرسم)

على حـ ونطبق احد ضلعي القائمه على ا ب ثم نرسم حـ ء بجانب الضلع الآخر (ش ٩)

فيكون حـ ء هو العمود المطلوب

البرهان ـ ء هـ عمود لان د ء هـ ا تساوى زاوية المثلث القائمة بالتطبيق

٤١ الزوايا المتتامه ـ هى ما كان مجموعها يساوى قائمه

٤٢ الزوايا المتكامله ـ هى ما كان مجموعها يساوى قائمتين

نظريه ٣

٤٣ الزاويتان المتجاورتان الحادثتان من تقاطع مستقيمين تكونان متكاملتين

المفروض ـ المستقيمان ب ء ، حـ هـ متقاطعان فى هـ (ش ١٠)

المطلوب اثباته ـ د م + د حـ هـ ء = ٢ ق

البرهان ـ نقيم هـ و عموداً على ب ء فينتج

د م + د ن = ١ ق (ش ٣٤)

د ع = ١ ق ,, ,,

بجمع

د م + د ن + د ع = ٢ ق

لكن د ن + د ع = د حـ هـ ء

اذن د م + د حـ هـ ء = ٢ ق وهو المطلوب

(شكل ١٠)

٤٤ فرع أول ـ الزوايا المتكونة حول نقطة من جهة واحدة من مستقيم تكون متكاملة

(شكل ١١)

المفروض ـ المستقيم ء ﻫ ٫ د و ٫ د ﻫ ٫ د ﻫ حول نقطة ت في الجهة العليا من ء ﻫ (ش ١١)

المطلوب اثباته ـ د و + د ﻫ + د ﻫ = ٢ ق

البرهان ـ د و + د ا ب ﻫ = ٢ ق (٤٣) نستعيض عن ا ب ﻫ بجزئيها

ينتج د و + د ﻫ + د ﻫ = ٢ ق وهو المطلوب

٤٥ فرع ثان ـ الزوايا المتكونة حول نقطة واحدة في مستو واحد مجموعها اربع قوائم

(شكل ١٢)

المفروض ـ الزوايا المتكونة حول ب في جميع الجهات (ش ١٢)

المطلوب اثباته ـ د ب + د ٤ + د ٦ + د ء ب ﻫ = ٤ ق

البرهان ـ نمد ا ب على استقامته من جهة ب وليكن ا ب ﻫ تقدم في (٤٤)

ان الزوايا الموجوده فوق ا ﻫ تساوى ٢ ق والموجوده تحته = ٢ ق اذن مجموع الزوايا المفروضه يساوى اربع قوائم

تمـــرينات

٨ اذا كانت احدى الزوايا الاربع الحادثة من تقاطع مستقيمين قائمه تكون كل من الثلاث الاخرى قائمه

٩ ست زوايا متساويه مرسومه حول نقطه ما مقدار كل زاويه منها

١٠ ارسم زاويه تتكامل مع زاويه معلومه

١١ زاويتان حدثتا من تقابل مستقيم بآخر واحداهما تزيد عن الاخرى بمقدار زاويه قائمه ما مقدار كل منهما

١٢ ارسم زاويه تتتام مع زاويه معلومه

تعـــريف

٤٦ النظريتان العكسيتان هما ما كان المفروض في احداهما مطلوباً في الثانيه وبالعكس

نظـريه ٤ (عكس المتقدمه)

كل زاويتين متجاورتين متكاملتين يكون ضلعاهما على استقامة واحدة

(شكل ١٣)

المفروض ـ د م + د ه = ٢ ق

المطلوب اثباته ـ ا ب على استقامة ب ج

البرهان ـ ان لم يكن ا ب على استقامة ب ج كان على استقامة

اخرى مثل ب هـ أعنى أن ا ب هـ خط مستقيم ومن حيث

أنه معلوم لنا فرضاً ان د م + د ه = ٢ ق

وبناء على (٤٤) د م + د ه ≠ د و = ٢ ق

فعلى حسب (٢) يكون د م + د ه ≠ د م + د ه + د و

وهذا خلف جاء من عدم التسليم بان ا ب على استقامة ب حـ

اذن ا ب على استقامة ب حـ وهو المطلوب

ملاحظة - بعض الدعاوى يكون عكسه صحيحاً كما شوهد

فى نظريتى ٣ و ٤ وبعضها ليس كذلك

فمثلاً - الزوايا القائمة كلها متساوية كما تقدم وليست

كل الزوايا المتساوية قائمة

تمرينات

١٣ اذا كانت الزاوية المحصورة بين منصفى زاويتين متجاورتين غير قائمة فالضلعان المتطرفان لا يكونان على استقامة واحدة

اذكر عكس ما يأتى وبين ان كان صحيحاً أو خطأ

١٤ كل دجاجة لها رجلان

١٥ نقطة منتصف مستقيم على بعدين متساويين من طرفيه

١٦ الانسان ذو عقل

١٧ الحيوان المفترس يأكل اللحوم

٤٨ بديهية - اذا زيد مقدار واحد على كل من شيئين وكان الناتج واحداً كان الشيئان متساويين

وعلى هذا فكل زاويتين تتكامل أو تتتام كل منهما مع زاوية واحدة تكونان متساويتين

تعريف

٤٩ الزاويتان المتقابلتان في الرأس هما ما كان ضلعا احداهما على امتداد ضلعي الاخرى

نظرية ٥

٥٠ الزاويتان المتقابلتان في الراس متساويتان

(شكل ١٤)

المفروض - زاويتان ب ، ﻫ متقابلتان في الرأس

المطلوب اثباته - ب = ﻫ

البرهان - من حيث ان كلا من الزاويتين ب ، ﻫ تتكامل مع ء فتكونان متساويتين (٤٨) وهو المطلوب

تمـــرين

١٨ منصفا الزاويتين المتقابلتين فى الرأس على استقامة واحدة

١٩ اذا امتد من نقطة أربعة مستقيمات وكانت كل زاوية تساوى غير المجاورة لها فاثبت ان كل زاويتين متساويتين متقابلتان فى الرأس

تسمية

٥١ اذا قطع مستقيم مستقيمين ايا كانا حدث من ذلك ثمانى زوايا لكل اثنتين منها اسم خاص بهما

(شكل ١٥)

(فى شكل ١٥) د ب ، د ح او د ء ، د ه تسميان متبادلتين داخلتين

" د و ، د ص " د ى ، د م " " خارجتين

" د ب ، د ه " د ء ، د ح " متجانبتين داخلتين

" د و ، د م " د ى ، د ص " " خارجتين

" د ح ، د و " د ه ، د ى او

" د ء ، د م " د ب ، د ص } تسميان متناظرتين

تعريف

٥٢ الزاويتان المتبادلتان الداخلتان ـ ما كانتا بين المستقيمين وفي جهتين مختلفتين من القاطع وغير متجاورتين مثل د د، د هـ

تنبيه يمكن تعريف باقي الزوايا مع السهولة قياساً على التعريف السابق

المستقيمات المتوازية

٥٣ تعريف ـ المستقيمات المتوازية هي مستقيمات في مستو واحد مهما امتدت في أي جهة لا تتلاقى

٥٤ بديهية ـ لا يمكن مدّ غير مستقيم واحد بين نقطتين

نظرية ٦

٥٥ اذا كان
(١) الزاويتان المتبادلتان الداخلتان متساويتين
(٢) " " الخارجتان "
(٣) " المتناظرتان متساويتين
(٤) " المتجانبتان الداخلتان متكاملتين
(٥) " " الخارجتان "
كان المستقيمان متوازيين

(١) اذا كان الزاويتان المتبادلتان الداخلتان متساويتين كان المستقيمان متوازيين

(شكل ١٦)

المفروض - (ش ١٦) ـ ـه = د ـه (شكل ١٧)

المطلوب اثبات ب ـه ‖ هـ ص

البرهان من حيث ان ـد ـه = د ـه

فتكون (٤٨) ـد م = د ء

نتصور فصل الجزء ـ ـه ء هـ

من الجزء ـه م ـه ص كما في الشكل (١٧) ثم ندير الجزء ـ ـه ء هـ

في اتجاه الأسهم الى أن يأخذ وضعا مثل هَ ءَ ـهَ تَ وبعد ذلك

نطبق هَ ءَ ـهَ تَ على ـه م ـه ص بحيث تقع نقطة ءَ على م ،

نقطة ـهَ على ـه وعا أن د ءَ = د م ينطبق المستقيم ءَ هَ

على م ـه وبالمثل ينطبق ـهَ تَ على ـه ص

فلو فرض ان المستقيمين ـ ـه ، هـ ص (ش ١٨) غير متوازيين

أي يتقابلان من جهة اليمين مثلا في نقطة مثل ل فلابد أن

يتقابلا من جهة اليسار في نقطة مثل ك (لان ـ ـه ء هـ

انطبق على ص ـه م ـه) وهذا خلف (٥٤) جاء من فرض

انهما تقابلا في نقطة ل

(شكل ١٨)

فاذن لاينقابلان ابدابل يكونان متوازيين وهوالمطلوب

ملاحظة ـ برهان الاحوال الاربع الباقية من هذه النظرية يرجع للحالة الاولى وهاك نموذجاً

اذاكان الزاويتان المتجانبتان الداخلتان متكاملتين كان المستقيمان متوازيين

المفروض (ش ١٩) د ن + د م = ٢ ق

المطلوب اثباته ع ح يوازى ل ك

البرهان ـ د ن + د م = ٢ ق فرضاً

د هـ + د م = ٢ ق (٤٣)

فتكون د ن = د هـ (٤٨)

(شكل ١٩)

وعلى حسب الحالة الاولى يكون ع ح يوازى ل ك وهوالمطلوب

٥٦ فرع ـ العمودان على مستقيم متوازيان

البرهان ـ د هـ + د ى = ٢ ق فرضاً

ومن حيث ان الزاويتين المتجانبتين متكاملتان فيكون (٥٥) هـ هـ يوازى ب ى

وهوالمطلوب

(شكل ٢٠)

تعريف – القضية المسلمة هى دعوى عملية صحتها واضحة بدون اجراء العمل فمثلا لايمكن مد موازيين بالعمل لمستقيم واحد من نقطة خارجة عنه

نظرية ٧

٥٧ يمكن مد مواز لمستقيم من نقطة خارجة عنه ولا يمكن مد خلافه

المفروض – مستقيم ا ب ونقطة هـ

المطلوب اثباته { (١) يمكن مد موازمن هـ للمستقيم ا ب
(٢) لا يمكن مد خلافه }

البرهان – (١) نمد هـ و عموداعلى ا ب ثم نقيم هـ هـ عموداً على هـ و فبناء على (٥٦) يكون هـ هـ يوازى ا ب وهوالمطلوب

شكل (٢١)

(٢) من القضايا المسلمة انه لايمكن مد مستقيمين موازيين لثالث من نقطة واحدة

٥٨ فرع – الموازيان لثالث متوازيان

(شكل ٢٢)

المفروض ا ب ‖ هـ و ، حـ ء ‖ هـ و

المطلوب اثباته ا ب ‖ حـ ء

البرهان – ان لم يكونا متوازيين تقابلا فى نقطة ع وهو خلف (٥٧)

٥٨ بديهية - الشيأن اللذان أحدهما ليس أكبر ولا أصغر من الثانى يكونان متساويين

نظرية ٨ (عكس نظرية ٦)

٥٩ اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين

ينتج ان
(١) كل زاويتين متبادلتين داخلتين متساويتان
(٢) " " خارجتين "
(٣) " " متناظرتين متساويتان
(٤) " " متجانبتين داخلتين متكاملتان
(٥) " " " خارجتين "

(١) كل زاويتين متبادلتين داخلتين متساويتان

المفروض - ب ﻫ قاطع المتوازيين اﺣ ، ﻫ ى (شكل ٢٣)

المطلوب اثباته ∠ ا ب ﻫ = ∠ ﻫ

البرهان - ان لم تكن ∠ ا ب ﻫ = ∠ ﻫ كانت أصغر أو اكبر منها

فاذا كانت ∠ ا ب ﻫ أصغر من ∠ ﻫ ومد ب ع بحيث يصنع ∠ ع ب ﻫ = ∠ ﻫ فبناء على (٥٥) يكون ب ع يوازى ﻫ ى

وبالفرض ب ا يوازى هـ ء فيكون قد أمكن مد موازيين لثالث
من نقطة واحدة وهو مستحيل اذن د ا ب ه ليست أصغر
من د ه وكذلك يبرهن على انها ليست اكبر منها ومن حيث أن
د ا ب ه ليست اكبر ولا أصغر من د ه فتكون مساويةلها (٥٨) وهو المطلوب

(٢) البرهان – يمكن استنتاجه مما ثبت فى (١) من هذه النظرية

(٣) كل زاويتين متناظرتين متساويتان

المطلوب اثباته – د ه = د ٦

البرهان – قد ثبت أن د ه = د ا ب ه

ومن حيث ان د ٦ = د ا ب ه بالتقابل فى الرأس

فبناء على (٢) تكون د ه = د ٦ وهو المطلوب

(٤) كل زاويتين متجانبتين داخلتين متكاملتان

المطلوب اثباته د ب + د ه = ٢ ق

البرهان – د ب + د ا ب ه = ٢ ق

لكن – د ا ب ه = د ه (١) من هذه النظرية

فيكون – د ب + د ه = ٢ ق وهو المطلوب

(٥) البرهان – يمكن استنتاجه مما ثبت فى (١) من هذه النظرية

نظرية ٩

٦٠ المستقيم العمود على احد مستقيمين متوازيين يكون عموداً على الثانى

المفروض - ا ب ∥ حـ ء ، هـ و ⊥ حـ ء

المطلوب اثباته - هـ و ⊥ ا ب أيضا

(شكل ٢٤)

البرهان - د و = د هـ بالتناظر

ومن حيث ان د و قائمة فرضا فتكون

د هـ قائمة اى هـ و عموداً على ا ب وهو المطلوب

تمــــرينات

٢٠ مفروض جملة مستقيمات متوازية فاذا أقمنا عموداً على احدها فما اتجاهه بالنسبة للاخرين

٢١ مستقيمان متوازيان قُطعا بثالث وكانت احدى الزوايا الداخلة ٣٠° ما مقدار كل زاوية من الشكل

٢٢ اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين ونصفت زاويتان متبادلتان داخلتان أو زاويتان متناظرتان يكون كل منصفين متوازيين

٢٣ مستقيمان ا ب ، حـ ء قطعهما ثالث فى نقطتى هـ ، س

فاذا كانت د ا هـ س = ١٢٣° ، د حـ س هـ = ٦٢° فهل ا ب ∥ حـ ء

٢٤ قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فكان مقدار احدى الزوايا الخارجة ١٠٥° ما مجموع كل زاويتين متبادلتين داخلتين

عمليّة ٢

٦١ المعلوم مستقيم ونقطة خارجة عنه والمطلوب رسم موازله من هذه النقطة

المفروض مستقيم مثل ا ب ونقطة مثل حـ خارجه عنه والمطلوب رسم موازٍ للمستقيم ا ب من نقطة حـ

العمل - ضع المثلث القائم الزاوية في الوضع م بحيث ينطبق أحد ضلعى القائمة على ا ب وبجانب الضلع الآخر ضع مسطره مثل س ثم حرك المثلث متكأً على المسطرة حتى يأخذ وضع مَ يكون فيه ضلع القائمة منطبقاً على حـ ثم ارسم حـ ص فيكون هو الموازى المطلوب

(شكل ٢٥)

البرهان - الزاويتان المتناظرتان متساويتان لان كلا منهما تساوى زاوية المثلث

نظرية ١٠

٦٢ الزاويتان اللتان كل ضلعين متناظرين منهما متوازيان تكونان اما متساويتين أو متكاملتين

للتساوى حالتان وللتكامل حالة واحدة

حالة التساوى الاولى - الزاويتان اللتان كل ضلعين منهما متوازيان ومتحدان في الاتجاه تكونان متساويتين

ملاحظة - لمعرفة اتجاه ضلع زاوية يفرض شخص يتحرك عليه مبتدأ من رأسها فالجهة التى يتحرك تبعا لها تكون اتجاه الضلع وبين اتجاه الاضلاع باسهم كما في الشكل

(شكل ٢٦)

المفروض - د ب ، د حـ فيهما

اب ‖ ء حـ ، ب هـ ‖ حـ و

وكل ضلعين متوازيين متحدان في الاتجاه

المطلوب اثباته د ب = د حـ

البرهان - كل من زاويتى ب ، حـ = د ن بالتناظر وحينئذ تكون د ب = د حـ وهو المطلوب

حالة التساوى الثانيه - الزاويتان اللتان كل ضلعين منهما متوازيان ومختلفان فى الاتجاه تكونان متساويتين

(شكل ٢٧)

المفروض - اب ١١ هـ ى ، ب و ١١ ى هـ

وكل متوازيين مختلفا الاتجاه

المطلوب اثباته - د ب = د ى

البرهان د ب = د ن بالتناظر

د ى = د ن بالتبادل

فتكون د ب = د ى (٢) وهو المطلوب

حالة التكامل - الزاويتان اللتان ضلعان منهما متوازيان ومتحدا الاتجاه والضلعان الاخران متوازيان ومختلفا الاتجاه متكاملتين

المفروض - اب ١١ وهـ ومتحد معه فى الاتجاه

ب حـ ١١ هـ ى ومخالف له فى الاتجاه

المطلوب اثباته د ب + د هـ = ٢ ق

البرهان - د هـ + د ن = ٢ ق (٥٩)

لكن د ب = د ن بالتبادل

(شكل ٢٨)

فيكون د ب + د هـ = ٢ ق وهو المطلوب

نظرية ١١

٦٣ الزاويتان اللتان كل ضلعين منهما متعامدان تكونان متساويتين او متكاملتين

اولا تكونان متساويتين اذا كانتا حادتين أو منفرجتين

ثانيا تكونان متكاملتين اذا كانت احداهما منفرجة والثانية حادة

(١) المفروض - د و ، د ه حادتان فيهما

ا ب ⊥ ب ﻫ ، ب ح ⊥ ب ى

المطلوب اثباته د و = د ه

شكل ٣٩

البرهان - د و = د ه لان د م تتتام مع كل منهما

اثبت الحالة السابقة بفرض ان الزاويتين لم تشتركا في الرأس

(٢) المفروض - د ب ، د ه منفرجتان فيهما ا ب ⊥ ى ه ، ب ح ⊥ ه ى

المطلوب اثباته - د ب = د ه

البرهان نمد وه على استقامته وكذلك ح ب

فينتج د ٤ = د ٣ (١) من هذه النظرية

وتكون د ب = د ه (٤٨)

(شكل ٣٠

حالة التكامل

المفروض - د ب منفرجه ، د ٣ حاده (ش ٣٠) فيهما كل

ضلعين متناظرين متعامدان

المطلوب اثباته - ـد ب + ـد ٣ = ٢ ق

البرهان - ـد ب + ـد ٤ = ٢ ق

ـد ٤ = ـد ٣ (١) من هذه النظرية

فينتج ـد ب + ـد ٣ = ٢ ق وهو المطلوب

المثلثات

(تعاريف)

٦٤ المثلث جزء من مستو محاط بثلاثة مستقيمات متقاطعة مثنى مثنى تسمى اضلاع المثلث والزوايا الناتجة من تقاطعها تسمى زوايا المثلث ورؤوسها تسمى رؤوسه

٦٥ المثلث المتساوى الساقين هو ما تساوى فيه ضلعان الضلعان المتساويان يسميان ساقى المثلث وضلعه الثالث قاعدته والرأس المقابل لها رأسه

٦٦ المثلث المتساوى الأضلاع هو ما كانت اضلاعه متساوية والمتساوى الزوايا هو ما كانت زواياه متساوية

وستعلم ان كل مثلث متساوى الأضلاع يكون متساوى الزوايا وبالعكس

٦٧ المثلث القائم الزاويه هو ما كانت احدى زواياه قائمة

الضلع المقابل للقائمة يسمى وترا لها

٦٨ الزاوية الخارجة عن مثلث هي المتكونة من ضلع منه ومن

امتداد آخر مثل د ب ء هـ (ش ٣١)

نظريه ١٢

٦٩ مجموع زوايا أي مثلث يساوى قائمتين

(شكل ٣١)

المفروض - المثلث ب حـ ء

المطلوب اثباته د ء + د ب + د حـ = ٢ ق

البرهان - نمد حـ ء على إستقامته وليكن ءهـ ثم نمد ءو يوازى

حـ ب فيحدث د ء + د ٤ + د ٣ = ٢ ق (٤٤)

وبما أن د ٤ = د ب بالتبادل ، د ٣ = د حـ بالتناظر

فيكون د ء + د ب + د حـ = ٢ ق وهو المطلوب

٧٠ فرع (١) الزاوية الخارجة عن مثلث تساوى مجموع الزاويتين غير

المجاورتين لها من المثلث

٧١ فرع (٢) لا يكون للمثلث الا زاوية واحدة قائمة أو واحدة منفرجة

٧٢ فرع (٣) ان في المثلث القائم الزاوية الحادتان متتامتان

٧٣ فرع (٤) اذا ساوى زاويتان من مثلث زاويتين من آخر كان الثالثتان متساويتين

٧٤ فرع (٥) الزاوية الخارجة من مثلث اكبر من كل من الزاويتين غير المجاورتين لها

تمرينات

٢٥ اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين ونصفت زاويتان متبادلتان يكون المنصفان متعامدين

٢٦ اثبت ان مجموع زوايا المثلث تساوى قائمتين وذلك باقامة عمودين على أحد أضلاعه من نهايتيه وانزال عمود عليه من الرأس المقابل له

٢٧ اثبت ان مجموع زوايا أى مثلث تساوى قائمتين بمد موازٍ من احدى رؤوسه للضلع المقابل

٢٨ كم زاوية منفرجة على الاقل تكون خارجة عن المثلث

٢٩ فى المثلث ا ب ﺣ زاوية ا = د ب فاذا مد ب ﺣ من جهة ﺣ تكون الزاوية الخارجة ضعف د ب

٣٠ اذا كان مقدار الزاويتين الخارجتين الحادثتين من امتداد ضلع من جهتيه ١٠٠° و ١٢٠° فما مقدار كل زاوية من المثلث

٣١ اذا انزل عمود من راس الزاوية القائمة من مثلث قائم الزاوية على

الوتر يحدث ثلاثة مثلثات زواياى واحد منها تساوى زوايا

كل من الآخرين

٣٢ اذا انزل عمود من رأس مثلث على الضلع المقابل له فوقع فى الخارج

يكون المثلث منفرج الزاويه

اذا مدت من رؤوس مثلث مستقيمات بحيث تصنع مع اضلاعه

على الترتيب زوايا متساوية تكون زوايا المثلث الحادث من تقابل

هذه المستقيمات بعضها مع بعض مساوية لزوايا المثلث الأول

نظريه ١٣

٧٥ من نقطة خارج مستقيم لايمكن انزال عمودين عليه

المفروض - مستقيم اب ونقطة حـ خارجة عنه

المطلوب اثباته - لايمكن انزال عمودين من حـ على اب

البرهان - لو امكن انزال عمودين مثل حـ ء

، حـ هـ لكانت حـ ء قائمة ، حـ هـ قائمة

(شكل ٣٢)

ووجود قائمتين فى مثلث خُلف وَالخلف نشأ من امكان انزال

عمودين اذن لايمكن انزال عمودين وهو المطلوب

عمليه ٣

٧٦ المعلوم مستقيم ونقطة خارجة عنه والمطلوب انزال عمود منها على هذا المستقيم

(شكل ٣٣)

المفروض مستقيم مثل ا ب ونقطة خارجة عنه مثل حـ والمطلوب انزال عمود من حـ على ا ب

العمل - نطبق حافة مسطرة على ا ب ثم نثبت عليها احد ضلعى القائمة من مثلث الرسم ونحرك المثلث حتى يمر الضلع الآخر من القائمة بنقطة حـ ثم نرسم حـ هـ فيكون هو العمود المطلوب كما فى الشكل المتقدم

البرهان - حـ هـ عمود على ا ب لانه صنع معه زاوية تساوى زاوية المثلث القائمة

تساوى المثلثات

نظريه ١٤

٧٧ يتساوى المثلثان اذا تساوى فيهما ضلعان والزاوية المحصوره بينهما النظير لنظيره

المفروض ـ مثلثان ا ب ح ، ء ﻫ و فيهما

(شكل ٣٤)

ا ب = ء ﻫ

ا ح = ء و

د ا = د ء

المطلوب اثباته △ ا ب ح = △ ء ﻫ و

البرهان ـ نطبق △ ا ب ح على △ ء ﻫ و بان نطبق الضلع
ا ب على مساويه ء ﻫ بحيث تقع النقطة ا على ء ، ب على
ﻫ ومن حيث أن د ا = د ء فرضا فيقع ا ح على ء و
ومن حيث أن ا ح = ء و فتقع نقطة ح على و
ويكون الضلع ب ح انطبق على الضلع ﻫ و لان نهايتي
الاول وقعتا على نهايتي الثاني

فنرى ان المثلثين انطبقا تمامًا وكونا شكلا واحدًا وحينئذ
يكون △ ا ب ح = △ ء ﻫ و وهو المطلوب

٧٨ (تنبيه مهم) في المثلثات المتساوية الأضلاع المتساوية
تقابلها الزوايا المتساوية وبالعكس الزوايا المتساوية تقابلها
الاضلاع المتساوية

تمرينات

٣٤ اذا اقيم عمود على مستقيم من منتصفه فكل نقطة من العمود تكون على بعدين متساويين من نهايتى المستقيم

٣٥ المستقيمان ا ب ، حـ ء ينصف كل منهما الآخر فى نقطة هـ اثبت ان ا حـ يوازى ب ء

٣٦ منصف زاوية الرأس من مثلث متساوى الساقين يقسمه الى مثلثين متساويين

٣٧ ا ، ب نقطتان فى جهة واحدة من مستقيم ء حـ فاذا كان ا حـ = ب ء ، د ا ء = د ب ء حـ تكون نقطة منتصف حـ ء على بعدين متساويين من ا ، ب

نظريه ١٥

٧٩ يتساوى المثلثان اذا تساوى فيهما ضلع وزاويتان النظيرلنظ

المفروض ـ △ ا ب حـ ، △ ء هـ و فيهما

ب حـ = هـ و

ـد ا = ـد ء

ـد ب = ـد هـ

(شكل ٣٠)

والمطلوب اثباته ـ △ ا ب حـ = △ ء هـ و

البرهان ـ ـد حـ = ـد و (٢٣)

نطبق △ ا ب حـ على △ ء هـ و بان نطبق ب حـ

مساويه هـ و بحيث تقع نقطة ب على هـ ، حـ على

ومن حيث أن ـد ب = ـد هـ فرضا فيقع الضلع ب ا

" ـد حـ = ـد و فرضا فيقع الضلع حـ ا على و

" الضلع ب ا وقع على هـ ء ، حـ ا وقع على و ء

ان نقطة تقابل ضلعى المثلث الاول وهى ا تقع فى نقطة

ضلعى الثانى وهى ء وبذلك ينطبق المثلث الاول على الثانى كال

ويكونان متساويين أى △ ا ب حـ = △ ء هـ و وهو

تمرينات

اﺣ ، ب ء عمودان متساويان اقيما على اب فى جهتين مختلفتين منه اثبتان اب ، ﺣ ء ينصف كل منهما الآخر

اذا كان منصف احدى زوايا مثلث عمودا على الضلع المقابل لها يكون المثلث متساوى الساقين

نظرية ١٦

فى كل مثلث متساوى الساقين الزاويتان المقابلتان للساقين متساويتان

المفروض - △ ابﺣ فيه اب = اﺣ

(شكل ٣٦)

المطلوب اثباته - ∠ب = ∠ﺣ

البرهان نتصف ∠ب اﺣ بالمستقيم اء فيحدث مثلثان

ابء ، اءﺣ فيهما اب = اﺣ فرضاً اء مشترك

∠ب اء = ∠ء اﺣ بالعمل

فيكون △ابء = △اءﺣ (٧)

ومن تساويهما تكون ∠ب = ∠ﺣ وهو المطلوب

فرع اول - فى كل مثلث متساوى الساقين منصف زاوية الرأس يكون عمودا على القاعدة ومنصفا لها

البرهان — ∆ اب ء = ∆ اء ﻫ (ش ٣٦)

فينتج اولا ∠ ٤ = ∠ ٦ أى أن اء عمود على ب

ثانيًا ب ء = ء ﻫ وهو المطلوب

فرع ثان - المثلث المتساوى الاضلاع متساوى الزوايا

(تنبيه) المستقيم اء فيه اربع خواص (١) مار بالرأس (٢) منصف لزاوية الرأس (٣) منصف للقاعدة (٤) عمود عليها فاذا وجدت خاصيتان من هذه الأربع لابد من وجود الاثنين الاخريين

تمرينات

منصف قاعدة مثلث متساوى الساقين على بعدين متساويين من منصفى ساقيه

٤١ اب ﻫ مثلث متساوى الساقين اخذ نقطتان ء، ﻫ على قاعدته بحيث أن ب ء = ﻫ ﻫ اثبت أن اء ﻫ مثلث متساوى الساقين ايضا

٤٢ اب ﻫ مثلث متساوى الاضلاع اخذت على أضلاعه ثلاثة ابعاد متساوية مثل او، ب ء، ﻫ ﻫ اثبت أن ء ﻫ و مثلث متساوى الاضلاع

نظرية ١٧ (عكس المتقدمة)

٨١ اذا تساوت زاويتان من مثلث يكون المثلث متساوى الساقين

المفروض - مثلث ا ب ح فيه ∠ ب = ∠ ح

المطلوب اثباته - ا ب = ا ح

البرهان - ننصف ∠ ب ا ح بالمستقيم ا ء

فينتج △ ب ا ء ، △ ء ا ح فيهما ا ء مشترك

∠ ب = ∠ ح وضا

∠ ٤ = ∠ ٥ بالعمل

فيكون △ ا ب ء = △ ا ء ح (٧٩) (شكل ٣٧)

ومن تساويهما ينتج ا ب = ا ح وهو المطلوب

فرع - المثلث المتساوى الزوايا يكون متساوى الأضلاع

تمرين

٤٣ المثلث ا ب ح نصفت زاوياه ب ، ح فتقابل المنصفان

فى نقطة ء فاذا كان ب ء = ء ح يكون المثلث ا ب ح

متساوى الساقين

نظرية ١٨

٨٢ يتساوى المثلثان اذا تساوت فيهما الاضلاع الثلاثة النظير لنظيره

المفروض - مثلثان ا ب حـ ، ء هـ و فيهما

ا ب = ء هـ : ا حـ = ء و : ب حـ = هـ و

المطلوب اثباته - Δ ا ب حـ = Δ ء هـ و

البرهان - نطبق الضلع ب حـ (شكل ٣٨)

على مساويه هـ و بحيث تقع

ب على هـ ، حـ على و وبحيث

تقع نقطة ا في جهة مضادة للجهة التي فيها نقطة ء بالنسبة للمستقيم هـ و فيأخذ المثلث ا ب حـ الوضع اَ هـ و ثم نمد المستقيم ء اَ فيحدث مثلثان هـ اَ ء ، و اَ ء كل منهما متساوى الساقين فيكون ∠ ٥ = ∠ ٢

∠ ٤ = ∠ ٣

بجمع المتساويتين ∠ ٥ + ∠ ٤ = ∠ ٢ + ∠ ٣

اى ∠ هـ اَ و = ∠ هـ ء و

فيكون Δ اَ هـ و = Δ ء هـ و (٧٧)

او Δ ا ب حـ = Δ ء هـ و وهو المطلوب

ملاحظة - اذا كان المثلثان فى وضع كما فى (ش ٣٩) نطبق كما تقدم فى ش٣٨ وعند ء آ الذى يقع خارج المثلثين فيحدث Δ هـ ء آ ، Δ و ء آ كل منهما متساوى الساقين
وتكون د هـ آ ء = د هـ ء آ ، د ٢ = د ٣
نطرح المتساوية الثانية من الاولى فينتج د و آ هـ = د و ء هـ
اذن Δ اهـ و = Δ ء هـ و (٧٧) أو مثلث ا ب هـ = Δ ء هـ و (شكل ٣٩)
يجوز بعد التطبيق ان يقع الضلع ا ب على امتداد ء هـ (ش ٤٠)
المثلث و ء آ متساوى الساقين
وتكون د آ = د ء = د ا
فالمثلثان متساويان

(شكل ٤٠)

تمرين

٤٤ مثلثان كلاهما متساوى الساقين قاعدتهما مشتركة

اثبت ان المستقيم الواصل بين رأسيهما عمود على القاعدة وينصفها

نظرية ١٩

٨٣ يتساوى المثلثان القائما الزاوية اذا تساوى فيهما وتر وضلع النظير لنظيره

المفروض - مثلثان قائما الزاوية فيهما الوتر ا ب = الوتر ء و والضلع ا هـ = ء هـ

المطلوب اثباته Δ ا ب هـ = Δ ء هـ و

البرهان - نحرك المثلث ا ب هـ من اليمين الى اليسار حتى ينطبق ا هـ على مساويه ء هـ

بحيث تقع ا على ء ، هـ على هـ ويأخذ المثلث ا ب هـ الوضع ء هـ بَ

ومن حيث ان زاويتى هـ قائمتان فيكون بَ هـ على استقامة هـ و (٤١)

ويكون المثلث ء و بَ متساوى الساقين لان ا ب = ء بَ = ء و

فتكون ىد ىَ = د و = د ب

اذن △ ا ب حـ = △ ء هـ و (٧٩) وهو المطلوب

تعريفان

٨٤ الشكل الرباعي - هو جزء من مستو محاط باربعة مستقيمات تسمى أضلاعه

٨٥ منصف المثلث - هو المستقيم الواصل من رأس المثلث الى منتصف الضلع المقابل لها

تمرينات متنوعة

٤٥ اذا مد مستقيم موازٍ لقاعدة مثلث متساوي الساقين بحيث يتقابل مع ساقيه او امتدادهما نتج مثلث آخر متساوي الساقين

٤٦ العمودان النازلان من منتصف قاعدة مثلث متساوي الساقين على ساقيه يكونان متساويين

٤٧ اذا مد احد ساقي مثلث متساوي الساقين من جهة الرأس ونصفت الزاوية الخارجة يكون المنصف موازيا للقاعدة

٤٨ اذا مد من إحدى نقط المنصف لزاوية موازيان لضلعيها كانا متساويين

٤٩ مثلث ا ب ﺣ متساوى الساقين فيه د ا اربعة أمثال د ﻫ اثبت ان كل عمود على قاعدته مثل ء ﻫ يكوّن مثلثا ء او متساوى الاضلاع

٥٠ اذا كان منصف الزاوية الخارجة عن مثلث موازيا لاحد الاضلاع يكون المثلث متساوى الساقين

٥١ اذا نصفت زاويتا القاعدة من مثلث متساوى الساقين فالمستقيم الواصل من الراس الى نقطة تقابل المنصفين يكون منصفا لزاوية الرأس

٥٢ يتساوى المثلثان اذا تساوى فيهما ضلعان ومنصف المثلث المقابل لاحدهما النظير لنظيرين

٥٣ اذا كانت زاوية من مثلث تساوى مجموع الاخريين يكون المثلث قائم الزاوية

٥٤ اذا كانت زاوية من مثلث تساوى مجموع الاخريين امكن تقسيم المثلث الى مثلثين متساويى الساقين

٥٥ إذا مد ضلع مثلث من نهايتيه فمجموع الزاويتين الخارجتين يزيد عن قائمتين

بقدر الزاوية المقابلة لذلك الضلع

٥ اذا نصفت الزوايا الخارجة عن مثلث حدث مثلث آخر كل زاوية منه تساوى نصف المكملة للزاوية المقابلة لها فى المثلث الاول

٥ الزاوية الحادثة من منصفى زاوية ا وزاوية ـه الخارجة تساوى نصف زاوية ب

٥ ا ب ـه مثلث متساوى الاضلاع نصفت زاويتا قاعدته فتقابل المنصفان فى ء ثم رسم من ء موازيا للساقين ا ب ، ا ـه اثبت ان الموازيين يقسمان ب ـه الى ثلاثة أقسام متساوية

٥ المستقيمات الموازية لاضلاع مثلث مارة برءوسه تكون مثلث آخر يساوى أربعة أمثال الاول وأضلاعه ضعف أضلاع الاول وزواياهما متساوية

المثلث ا ب ـه نصفت زاوياه ب ، ـه فتلاقى المنصفان فى م ثم مد من م موازللضلع ب ـه فقابل ا ب فى هـ ، ا ـه فى و اثبت أن هـ و = هـ ب + و ـه

ا ب ـه ، ء ب ـه مثلثان كل منهما متساوى الاضلاع وفى جهتين

مختلفين من الضلع المشترك ب ح نصفت زاوية ا ب ح فقابل المنصف الضلع ا ح فى هـ وأيضا نصفت زاوية ح ب ء فقابل منصفها الضلع ء ح فى و اثبت ان △ ب و هـ متساوى الاضلاع

٦٢ ا ب ح مثلث كيف كان رسم على كل من ضلعيه ا ب ، ا ح مثلث متساوى الاضلاع وهما ء ب ا ، هـ ا ح اثبت ان ح ء = ب هـ .

٦٣ مثلث ا ب ح مد ضلعاه ا ب ، ا ح ثم نصفت الزاويتان الخارجتان فتقابل المنصفان فى ء اثبت ان ا ء ينصف زاوية ب ا ح

٦٤ التمرين الآتى هام - اذا كانت احدى الحادتين فى المثلث القائم الزاوية ضعف الاخرى يكون الوتر ضعف الضلع المقابل للزاوية الصغرى

٦٥ اذا كان منصف المثلث نصف الضلع الواصل اليه يكون المثلث قائم الزاوية

٦٦ اذا مد من كل من راسى مثلث مستقيم الى الضلع المقابل لها فنقطة تقاطع هذين المستقيمين لاتكون فى منتصف الاثنين

٦٧ مثلث ا ب ح متساوى الساقين اخذ البعد ب ء = ح هـ اثبت ان القاعدة تنصف هـ ء

٦٨ ماعدد المثلثات المتساوية الاضلاع التي يمكن ان تشترك في رأس واحد

٦٩ مثلث متساوى الاضلاع رسم على ارتفاعه مثلث آخر متساوى الاضلاع اثبت ان اضلاع المثلثين متعامدة

٧٠ المثلث ا ب ح نصفت د ا منه ونصفت ايضا الزاوية الخارجة ا ح ء اثبت ان المنصفين غير متوازيين

٧١ مجموع زوايا أى شكل رباعى يساوى اربع قوائم

٧٢ الثلاث الزوايا الخارجة عن مثلث المجاورة كل منها لزاوية من زواياه تساوى اربع قوائم

٧٣ المثلثات ا ب ح ، ا ب ء ، ح ء ه متساوية الأضلاع والمطلوب اثبات ان النقط ب ، ا ، ه على استقامة واحدة

٧٤ المثلث ا ب ح متساوى الساقين وقايم الزاوية في ا فاذا مدت قاعدته من جهة ب الى ء بحيث يكون ء ب = ا ب ومن جهة ح الى ه بحيث يكون ح ه = ا ح ابحث أن ء ا ه ستة أمثال كل من زاويتي ء ، ه

٧٥ لماذا اذا امسكت بيديك خيطين أو شعرتين وشددتهما جيداً رأيت انهما منطبقان على بعضهما تمام الانطباق حتى يخيل لك انهما واحد لا اثنان

نظريه ٢٠

٨٦ فى كل مثلث الضلع الاكبر تقابله الزاوية الكبرى

(شكل ٤٢)

المفروض ـ ∆ ا ب حـ فيه ا ب > ا حـ

المطلوب اثباته ـ ∠ ب حـ ا > ∠ ب

البرهان ـ نأخذ على ا ب البعد ا ء

= ا حـ ثم نوصل ء حـ فينتج مثلث ا ء حـ متساوى الساقين

فيه ∠ ن = ∠ م

ومن حيث أن ∠ ا حـ ب > ∠ ن فتكون ∠ ا حـ ب > ∠ م

أيضا ولكن ∠ م > ∠ ب لانها خارجة عن ∆ ء حـ ب

فتكون ∠ ن > ∠ ب

وعليه ∠ ا حـ ب > ∠ ب وهو المطلوب

نظرية ٢١ عكس المتقدمة

٨٧ في كل مثلث الزاوية الكبرى يقابلها الضلع الاكبر

المفروض - ∆ ا ب ﺣ فيه ∠ ﺣ > ∠ ب

المطلوب اثباته اب > اﺣ

البرهان - ان لم يكن اب > اﺣ لكان مساوياً له أو اصغر منه

فان كان اب = اﺣ تكون ∠ ب = ∠ ﺣ (٨٠) وهو خلف

وان كان اب < اﺣ تكون ∠ ﺣ < ∠ ب (٧٦) وهو خلف أيضاً

(شكل ٤٣)

ومن حيث ان اب لا يساوى اﺣ

ولا اصغر منه (٣) فلابد أن يكون

اب > اﺣ وهو المطلوب

تمرينات

٧٦ المثلث ا ب ﺣ فيه ∠ ا = ٣٠° ، ∠ ب = ٦٧° ماهو اصغر ضلع وماهو اكبر ضلع فيه

٧٧ المثلث ا ب ﺣ نصفت كل من ∠ ب ، ∠ ﺣ فتقابل المنصفان في ء فاذا كان ب ء > ء ﺣ كان ا ب > ا ﺣ

٧٨ اذا وصل من رأس مثلث متساوى الساقين الى نقطة من قاعدته

أوس امتدادها كان المستقيم الواصل أصغر واكبر من احد الساقين

٧٩ ا ب حـ ء شكل رباعى فيه ا ب اكبر أضلاعه ، حـ ء أصغرها

اثبت أن حـ ب (حـ ء

٨٠ ا ب حـ مثلث متساوى الساقين مدّ من ء احدى نقط

الساق ا حـ مستقيم قابل الساق ا ب فى هـ وامتداد

القاعدة فى و

اثبت أن ا هـ > ا ء

٨١ △ ا ب حـ فيه ا ب > ا حـ فاذا مدّتا على امتدادهما

من جهة ب ، حـ ونصف الزاويتان الخارجتان بالمستقيمين

ب ء ، حـ ء

اثبت ان حـ ء > ب ء

ملاحظة - هذه العلامة (X) تدل على ان الضلع الذى

توضع عليه مشترك بين مثلثين

نظرية ٢٢

٨٨ مجموع أى ضلعين من مثلث اكبر من الثالث وفاضلهما أصغر منه

المفروض - △ ا ب حـ

المطلوب اثباته { (١) ب ا + ا حـ > ب حـ
(٢) ب ا - ا حـ < ب حـ }

(شكل ٤٤)

البرهان (١) ننصف ∠ ب ا حـ بالمستقيم ا ء

فيكون ∠ ه > ∠ هـ (٧٤)

اذن ∠ ه > ∠ و ولان ∠ هـ = ∠ و بالتنصيف

وعليه (٨٧) ا ب > ب ء

وبالمثل ا حـ > ء حـ

بجمع ا ب + ا حـ > ب ء + ء حـ

او ا ب + ا حـ > ب حـ وهو المطلوب

وهذا يؤيد تعريف المستقيم

(شكل ٤٥)

(٢) ننصف ∠ ب ا حـ بالمستقيم ا ء

ثم نأخذ ا هـ = ا حـ ونوصل ء هـ فيحدث

△ ا هـ ء = △ ا ء حـ (٧٧)

وعليه هـ ء = ء حـ

وفى △ هـ ب ء الضلع هـ ب < ب ء + هـ ء

أو هـ ب < ب ء + ء حـ

„ هـ ب < ب حـ

فيكون ا ب - ا حـ < ب حـ وهو المطلوب

تمرينات

٨٢ ثلاثة مستقيمات أطوالها ٦ متر ، ٢ متر ، ٤ متر هل يمكن ان تكون أضلاع مثلث

٨٣ فى كل شكل رباعى أى ضلع أصغر من مجموع الثلاثة الاخر

٨٤ أربعة مستقيمات أطوالها ١٠ سنتيمتر ، ٤ سنتيمتر ، ٦ سنتيمتر ، ٧ سنتيمتر انتخب كل ثلاثة منها تصلح اضلاعاً لمثلث

٨٥ مجموع قطرى أى شكل رباعى اكبر من مجموع أى ضلعين متقابلين منه

٨٦ محيط المثلث اكبر من ضعف أى ضلع منه

نظرية ٢٣

٨٩ اذا اخذت نقطة داخل مثلث فمجموع بعديها عن نهايتي أحد أضلاعه أصغر من مجموع الضلعين الآخرين وزاوية البعدين اكبر من زاوية الضلعين

المفروض - △ ا ب حـ ونقطة ء داخله

المطلوب اثباته
(١) ب ء + ء حـ < ب ا + ا حـ
(٢) ∠ ء > ∠ ا

البرهان - (١) نمد ب ء حتى يقابل ا حـ فى هـ (شكل ٤٦)

فى △ ا ب هـ : ب ء + ء هـ < ب ا + ا هـ (٨٨)

وفى △ ء هـ حـ : ء حـ < هـ حـ + هـ ء (٨٨)

بجمع ب ء + ء هـ + ء حـ < ب ا + ا هـ + هـ حـ + هـ ء (ا هـ + هـ حـ = ا حـ)

أو ب ء + ء حـ < ب ا + ا حـ وهو المطلوب

(٢) ∠ هـ > ∠ ا لانها خارجة عن △ ا ب هـ

∠ ء > ∠ هـ " " " △ ء هـ حـ

فتكون (٨) ∠ ء > ∠ ا وهو المطلوب

تمرين

٨٧ اذا اخذت نقطة داخل مثلث ووصل منها الى رؤوسه يكون مجموع

المستقيمات الواصلة أصغر من مجموع أضلاعه

تعريفات

٩٠ الدائرة هي جزء مستو محاط بخط منحن جميع نقطه على أبعاد متساوية من نقطة داخلة تسمى مركزا والخط المنحنى السالف الذكر يسمى محيط الدائرة

٩١ قطر الدائرة - هو كل مستقيم يمر بمركزها وينتهي في المحيط

٩٢ القوس - هو جزء من محيط الدائرة

٩٣ وتر القوس - هو المستقيم الواصل بين نهايتيه

قوس
وتر
قطر
نصف قطر

عملية ٤

ارسم مثلثا بمعلومية أضلاعه الثلاثة

ا
ب
حـ
(شكل ٤٧)
و
هـ
ء

المفروض - ا ، ب ، حـ اضلاع مثلث.

المطلوب رسم المثلث

العمل - نرسم مستقيما أياكان ونأخذ عليه البعد ءهـ = ا

ثم نركز في ء وبنصف قطر يساوي ب نرسم قوساً

ثم نركز في هـ وبنصف قطر يساوي حـ نرسم قوسا يقطع القوس الاول في و فيكون △ و ء هـ هو المطلوب البرهان (٨٢)

تمرينات

٨٨ ارسم مثلثاً أضلاعها

(١)	٣ سنتيمتر	٤ سنتيمتر	٥ سنتيمتر
(٢)	٢	،، ٤	،، ٦
(٣)	٥	،، ٣	،، ٦
(٤)	٧	،، ١	،، ٤

عند عدم امكان رسم احد المثلثات اذكر السبب

٨٩ ارسم مثلثا متساوى الاضلاع على مستقيم معلوم

ارسم مثلثا متساوى الساقين بحيث يكون طول كل من ساقيه ضعف قاعدته

عمليّة ٥

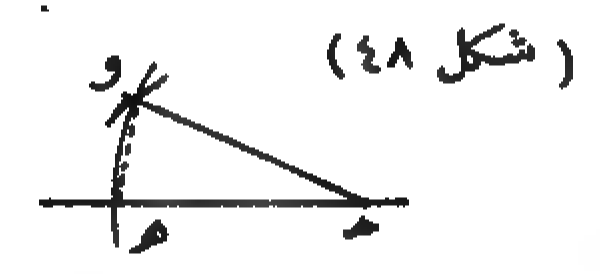
٩٥ ارسم زاوية تساوى زاوية معلومة

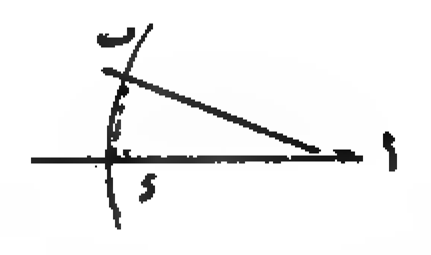
المفروض - د ا والمطلوب رسم زاوية تساويها

العمل - نرسم مستقيما ونأخذ نقطة من نقطه مثل هـ ثم نركز فى ا وببعد

أياكان نقطع الضلعين فى ب ، ء

(شكل ٤٨)





ثم نركز فى ﺣ وبالبعد عينه نرسم قوسا يقطع المستقيم فى هـ ثم
نأخذ البعد ء ب ونركز فى هـ ونقطع القوس هـ و فى و
فتكون ∆ و ﺣ هـ هى المطلوب

البرهان ـ ∆ ب ا ء = ∆ و ﺣ هـ (٨٢)

تمرينات

٩١ المعلوم زاويتان من مثلث والمطلوب ايجاد الثالثه

٩٢ ارسم مثلثا بمعلومية ضلع والزاويتين المجاورتين له

٩٣ ارسم مثلثا متساوى الساقين بمعلومية احد ساقيه واحدى
زاويتى القاعدة

٩٤ ارسم مثلثا بمعلومية ضلعين والزاوية المحصورة بينهما

٩٥ ارسم مثلثا بمعلومية زاويتين والارتفاع النازل من رأسه
الثالثه

نظرية ٢٤

٩٦ اذا ساوى ضلعان من مثلث نظيريهما من اخر وكانت الزاوية المحصورة بين ضلعى الاول اصغر من نظيرتها فى الثانى فالضلع المقابل للزاوية الاولى أصغر من الضلع المقابل للزاوية الثانية

المفروض - مثلثان ا ب ح ، ء هـ و وفيهما

ا ب = ء هـ ، ا ح = ء و

د ا ⟨ د هـ ء و

(ش ٤٩) ، (ش ٥٠) ، (ش ٥١)

(شكل ٤٩)

المطلوب اثبات ب ح ⟨ هـ و

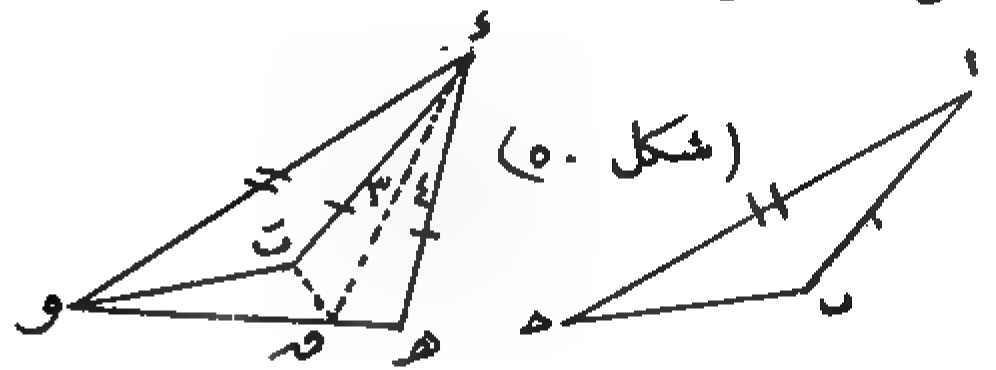
البرهان فى الاشكال الثلاثة نطبق △ ا ب ح على △ ء هـ و بان نضع ا ح على ء و بحيث تقع ح على و ، ا على ء ومن حيث ان د ا ⟨ د هـ ء و فيقع ا ب داخل د هـ ء و وتقع نقطه ب على احدى نقط هـ و فى نقطة ت (ش ٤٩) او داخل المثلث ء هـ و (ش ٥٠) اوخارجة (ش ٥١) فيكون اذن △ ء ت و هو عين △ ا ب ح فى الاشكال الثلاثة

فى (ش ٤٩) بَ و (هـ و (٥)

أو ب حـ (هـ و

فى كل من (ش ٥٠) ، (ش ٥١) نمد ء ى منصف الزاوية هـ ء بَ

ثم نوصل بَ ى فيحدث Δ ء هـ ى ، Δ ء ى بَ متساويين فيهما

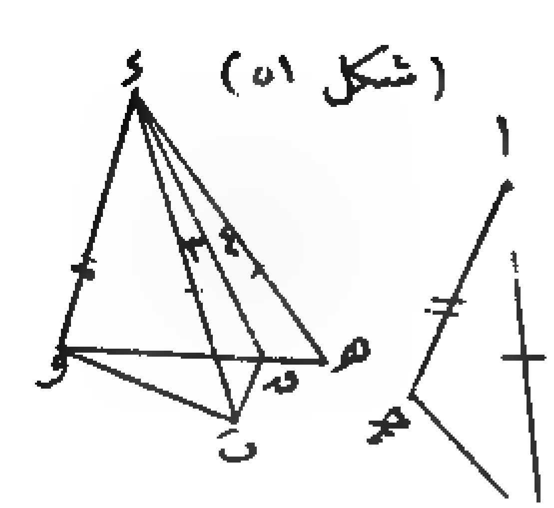


ء ى مشترك

ء هـ = ا ب = ء بَ

< ٤ = < ٣

اذن Δ ء هـ ى = Δ ء ى بَ



ومن تساويهما ينتج ى بَ = ى هـ

وفى Δ بَ ى و

بَ و (بَ ى + ى و

أو بَ و (هـ ى + ى و

اذن ب حـ (هـ و وهو المطلوب.

نظرية ٢٥ عكس المتقدمه

٩٧ اذا ساوى ضلعان من مثلث نظيريهما من آخر وكان الضلع الثالث من الاول اصغر من نظيره فى الثانى تكون الزاوية المقابلة للضلع الثالث فى الأول أصغر من الزاوية المقابلة للضلع الثالث من الثانى

المفروض - اب = ده ، اح = دو ، بح (هو

(شكل ٥٢)

المطلوب اثباته دا (دء

البرهان - ان لم تكن دا (دء كانت مساوية لها أو اكبر منها

فان كانت دا = دء تساوى المثلثان (٧)

ويكون بح = هو وهو خُلف للفرض

وان كانت دا) دء وجب ان يكون

بح) هو (٩٦) وهذا خُلف أيضا

اذن (٣) دا (دء وهو المطلوب

تمرينات

٩٦ ـ اذا كان منصف مثلث مائلا على الضلع الواقع عليه كان الضلعان الآخران مختلفين

٩٧ مثلث ا ب ح فيه ا ب (ا ح فاذا مد منصفه ا ء كانت د ا ء ب (د ا ء ح

٩٨ مثلث ا ب ح فيه ا ح > ا ب اخذنا على ضلعيه بعدين ح هـ = ب ء

اثبت أن ح ء > ب هـ

٩٩ مثلث ا ب ح فيه ا ح > ا ب اثبت أن كل نقطة من نقط منصفه ا ء تكون أقرب الى ب من ح

نظرية ٢٦

٩٨ اذا انزل عمود وموائل على مستقيم من نقطة خارجة عنه كان

(١) العمود أصغر من كل مائل

(٢) المائلان اللذان بعدا موقعيهما عن موقع العمود متساويان يكونان متساويين

(٣) " " " " مختلفان " مختلفين

واكبرهما ما كان بعد موقعه عن موقع العمود اكبر

المفروض		المطلوب اثباته	
	(١) ا ب ⊥ ح هـ		(١) ا ب (ا هـ
	(٢) ء ب = ب هـ		(٢) ا ء = ا هـ
	(٣) ح ب > ب ء		(٣) ا ح > ا ء

البرهان (١) ا ب (ا هـ (٨٧)

(٢) △ ا ء ب = △ ا ب هـ (٧٧)

(شكل ٥٣)

فيكون د ا ء ا هـ

(٣) د ه منفرجه (٧٤) فيكون ا هـ) ا م وهوالمطلو

٩٩ فرع - من نقطة خارجة عن مستقيم لايمكن مدا كثر من مستقيمين متساويين الى هذا المستقيم

١٠٠ تعريف - بعد نقطة عن مستقيم هوالعمود النازل منها عليه

تمرين

اى مستقيم لايقابل محيط الدائرة فى اكثر من نقطتين

عملية ٦

(شكل ٥٤)

١٠١ المطلوب تنصيف مستقيم معلوم ا ب

العمل - نركز فى كل من ا ، ب وبفتحة اكبر من نصف ا ب نرسم اقواساً تتقاطع فى نقطتى جـ ، ء

فيكون جـ ء منصفا للمستقيم ا ب فى هـ

البرهان - △ ا جـ ء = △ ب جـ ء (٨٢) وعليه د ا جـ ء = د ب جـ ء اذن △ جـ ا هـ = △ جـ هـ ب (٧٧)

ويكون ا هـ = هـ ب وهوالمطلوب

تمـــرينات

١ اقسم مستقيما الى جزاين احدهما ثلاثة اخماس الآخر

٢ بيّن بالعمل ان منصفات المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة

٣ ارسم مستقيما من رأس مثلث الى الضلع المقابل لها بحيث يزيد عن

احد الضلعين الأخرين بقدر ماينقص عن الثانى

عمليه ٧

١ المطلوب انزال عمود على مستقيم من نقطة خارجة عنه

(شكل ٥٥)

المفروض مستقيم ا ب ونقطه هـ خارجه عنه

والمطلوب انزال عمود من هـ على ا ب

العمل ـ نركز فى هـ وبنصف قطر اياكان

نقطع ا ب فى نقطتى ﺟ ، ء ثم نركز

فى نقطتى ﺟ ، ء وبنصف قطر واحد نرسم قوسين يتقاطعان فى

و فيكون هـ و هو العمود المطلوب

(البــرهان يشبه برهان العمليه السابقه)

تمرينات

١ بيّن بالعمل أن ارتفاعات المثلث تتقاطع فى نقطة

٢ نصف زاويتين من مثلث ومن نقطة تقابل المنصفين انزل أعمدة

على أضلاعه وحقق تساوى هذه الاعمدة بالقياس

عملية ٨

١٠١ المطلوب اقامة عمود على مستقيم من نقطة مفروضة عليه

المفروض - مستقيم ا ب ونقطة حـ عليه

والمطلوب اقامة عمود من حـ على ا ب

العمل - نركز فى حـ وبنصف قطر

أيا كان نقطع ا ب فى نقطتى هـ ، و

(شكل ٥٦)

ثم نركز فى هـ ، و وبنصف قطر اكبر من هـ حـ نرسم قوسين

يتقاطعان فى ء فيكون حـ ء هو العمود المطلوب

البرهان - △ ء هـ حـ = △ ء حـ و (٨٢)

وعليه ∠ ء حـ هـ = ∠ ء حـ و

اذن ء حـ عمود على ا ب

تمرين

١٠٦ بيّن بالعمل ان الاعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها تتقاطع فى نقطة واحدة

عمليه ٩

١ المطلوب تنصيف زاوية معلومة

(شكل ٥٧)

المفروض - ∠ ب ا ﺣ والمطلوب تنصيفها

العمل - نركز فى رأسها وبنصف قطر أيا كان نقطع ضلعيها فى ﻫ ، و ثم نركز فى كل من ﻫ ، و وبنصف قطر أكبر من نصف ﻫ و نرسم قوسين يتقاطعان فى ء فيكون ا ء هو المنصف المطلوب

البرهان - △ ا ﻫ ء = △ ا ء و (٨٢) وبذا تكون ∠ م = ∠ ﻫ أى أن ا ء منصف لزاوية ب ا ﺣ وهو المطلوب

تمرينات

المطلوب تقسيم زاوية معلومة الى أربعة أقسام متساوية

بين بالعمل ان منصفات زوايا المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة

نصف أربع الزوايا الحادثة من مستقيمين متقاطعين مع الاختصار فى العمل

نصف الزاويتين الحادثتين من تقابل مستقيم بآخر واذكر اتجاه احد المنصفين بالنسبة للآخر

عمليه ١٠

١٠٣ المطلوب رسم موازٍ لمستقيم معلوم من نقطة خارجة عنه

(شكل ٥٨)

المفروض مستقيم ا ب ونقطة حـ

المطلوب مد موازٍ من حـ الى المستقيم ا ب

العمل - نركز فى احدى نقط ا ب ولتكن س

وبفتحة اختيارية نقطع ا ب فى ص ثم نركز فى حـ وبالفتحة عينها نرسم قوسا ثم نركز فى ص وبفتحة تساوى س حـ نرسم قوسا آخر يقطع الاول فى نقطة م فيكون م حـ هو الموازى المطلوب

البرهان لو وصل حـ ص يحدث

∆ حـ م ص = ∆ حـ ص س

لان حـ ص مشترك

حـ م = س ص بالعمل

حـ س = م ص بالعمل

ومن تساويهما ينتج

ـــد م حـ ص = ـــد حـ ص س

وعلى ذلك يكون حـ م ‖ ا ب وهو المطلوب

تمرينات متنوعة

(على الدعاوى العمليه)

(ملاحظة) تستعمل فى حل هذه التمرينات الدوّاره (البرجل) والمسطرة غير المدرجة

١٠٧ من نقطتين فى جهتين مختلفتين من مستقيم ارسم مستقيمين يتقابل احدهما مع الآخر فى احدى نقط المستقيم ويصنعان معه زاويتين متساويتين

١٠٨ المعلوم قاعدة مثلث متساوى الساقين والارتفاع النازل عليها والمطلوب رسمه

١٠٩ عين نقطة على مستقيم معلوم تكون متساوية البعدين عن ضلعى زاوية معلومة

١١٠ ارسم مستقيما يمر بنقطة داخل زاوية وينتهى بضلعيها بحيث تكون النقطه فى منتصفه

١١١ المطلوب تقسيم زاوية قائمة الى ثلاثة اقسام متساوية

١١٢ المعلوم مستقيم ونقطتان خارجتان عنه والمطلوب رسم مستقيمين يمر احدهما بالاولى والآخر بالثانية بحيث يكونان مع المستقيم المعلوم مثلثا متساوى الأضلاع

١١٣ المعلوم زاوية والمطلوب رسم مستقيم يصنع مع ضلعيها زاويتين احداهما ثلاثة أمثال الاخرى

١١٤ المطلوب رسم مواز لاحد اضلاع مثلث بحيث يكون مساوياً لمجموع قطعتى الضلعين المحصورتين بينه وبين موازيه

١١٥ عين نقطه مثل ء على أحد ضلعى القائمة من مثلث قائم الزاوية ا ب ح بحيث يكون ء ب مساوياً للعمود النازل من ء على الوتر ح ا

١١٦ المطلوب رسم مواز لاحد أضلاع مثلث منتهٍ بالضلعين الآخرين ويساوى طولاً معلوماً

١١٧ معلوم أحد ارتفاعات مثلث متساوى الاضلاع والمطلوب رسمه

١١٨ ارسم مثلثا قائم الزاوية معلوما منه وتر وضلع

١١٩ معلوم محيط مثلث وزاويتان منه والمطلوب رسمه

١٢٠ عين نقطة على مستقيم معلوم بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين خارجتين عنه وفى جهة واحدة منه أصغر ما يمكن

١٢١ معلوم من مثلث ضلع واحدى الزاويتين المجاورتين له ومجموع الضلعين الآخرين والمطلوب رسمه

١٢٢ ارسم مثلثا قائم الزاوية معلوماً منه احدى زاويتيه الحادتين ومجموع ضلعى القائمة

١٢٣ ارسم مثلثا قائم الزاوية معلوماً منه الوتر ومجموع الضلعين الآخرين

١٢٤ ارسم مثلثا قائم الزاوية معلوماً منه الوتر وفرق الضلعين الآخرين

١٢٥ ارسم مثلثا متساوى الساقين معلوماً منه محيطه والارتفاع النازل على القاعدة

(المضلعات)

تعريفات

١٠٤ المضلع هو جزء من مستو محاط بمستقيمات متقاطعة مثنى مثنى وتسمى هذه المستقيمات أضلاع المضلع والزوايا التى تتكون عنها تسمى زواياه كما ان رؤوس هذه الزوايا تسمى رؤوسه

ا ب د ء هـ

١٠٥ قطر المضلع هو كل مستقيم واصل بين

رأسين غير متجاورتين مثل ا هـ

١٠٠ الشكل الرباعى هو مضلع له أربعة أضلاع

١٠١ متوازى الأضلاع هو شكل رباعى كل ضلعين فيه متقابلين متوازيان (متوازى أضلاع)

١٠٨ المعين - هو شكل رباعى أضلاعه متساوية (معين)

١٠٩ المستطيل - هو شكل رباعى زوايا الاربعة متساوية وستعلم انها قوائم (مستطيل)

١١٠ المربع - هو شكل رباعى اضلاعه متساوية

١١١ وزواياه كذلك (مربع)

شبه المنحرف - هو شكل رباعى فيه ضلعان متوازيان يسميان قاعدتيه (شبه منحرف)

١١٢ المضلع المنتظم هو ما كانت أضلاعه متساوية وزواياه كذلك (مضلع منتظم)

نظرية ٢٧

١١٣ مجموع زوايا المضلع تساوى زوايا قوائم بقدر ضعف عدد أضلاعه ناقصا أربع قوائم

(شكل ٥٩)

المفروض - المضلع ا ب ﺣ ٤ ﻫ

المطلوب اثباته - زوايا هذا المضلع تساوى قوائم عددها ٥×٢-٤

البرهان - نأخذ نقطة داخل المضلع مثل م ثم نوصلها برؤوسه فيتكون على كل ضلع مثلث وكل مثلث زواياه تساوى قائمتين أى أن القائمتين مكررتان مرات بقدر عدد الاضلاع فيكون مجموع زوايا المثلثات يساوى قوائم عددها ٥ × ٢

لكن مجموع زوايا المثلثات يزيد عن مجموع زوايا المضلع بقدر الزوايا المتكونة حول نقطة م فلو طرحنا من مجموع زوايا المثلثات أربع قوائم لكان الباقى هو زوايا المضلع وعلى ذلك تكون زوايا المضلع = ٥ × ٢ - ٤ قوائم وهو المطلوب

(تنبيه) زوايا أى شكل رباعى = ٤ قوائم

فرع - زوايا المستطيل والمربع كل منها قائمة

نظريه ٢٨

١١٤ اذا مدت أضلاع أى مضلع بالترتيب من جهة واحدة كان مجموع الزوايا الخارجة أربع قوائم

(شكل ٦٠)

المفروض - مضلع ا ب حـ ء هـ مدت أضلاعه كما فى الشكل

المطلوب اثباته - مجموع الزوايا الخارجة = ٤ ق

البرهان - مجموع الزوايا الداخلة والخارجة يحتوى على قوائم بقدر ضعف أضلاع المضلع (لان كل ضلع مد كون مع الآخر زاويتين متكاملتين) معلوم ان مجموع الزوايا الداخلة يحتوى دائما على قوائم بقدر ضعف الاضلاع ناقصا اربع قوائم (١١٣) اذن مجموع الزوايا الخارجة على حدته يساوى اربع قوائم

تمرينات

١٢٦ اثبت النظرية السابقة بأخذ نقطة فى مستوى المضلع ومد موازيات منها لأضلاعه

١٢٧ المطلوب ايجاد مقدار كل زاوية داخلة من مخمس منتظم

١٢٨ مجموع زوايا مضلع يساوى ثمانى قوائم ما عدد أضلاعه .

١٢٩ اذا كانت كل زاوية داخلة من مضلع منتظم ١٥٠ درجة فما عدد اضلاعه

١٣٠ ما نسبة كل زاوية من مثمن منتظم أو من معشر منتظم الى القائمة

١٣١ اذا كانت زوايا مخمس مناسبة الى ١ و ٣ و ٦ و ٩ و ١١ فما نسبة كل منها الى القائمة

١٣٢ مجموع الزوايا الخارجة من مضلع يساوى مجموع زواياه الدلخلة ما عدد أضلاعه

١٣٣ ما عدد الاشكال المنتظمة الممكن استعمالها فى التبليط وهل يمكن التبليط بنوعين فاكثر من تلك الاشكال المنتظمة معًا

١٣٤ مضلعان منتظمان عدد أضلاع احدهما ضعف الآخر والنسبة بين زاويتين منهما $\frac{9}{8}$ ما عدد أضلاع كل منهما

نظريه ٢٩

فى كل متوازى الاضلاع ١١٥

(١) القطر يقسمه الى مثلثين متساويين

(٢) الضلعان المتقابلان متساويان

(٣) الزاويتان المتقابلتان متساويتان (س ٦١)

(٤) كل من القطرين ينصف الآخر

المفروض فى الاحوال الاربعة متوازى الاضلاع ا ب حـ ى

(١) المطلوب اثباته - △ ا ب حـ = △ ا حـ ى

البرهان - △ ا ب حـ = △ ا حـ ى (٧٨).

(٢) المطلوب اثباته ا ى = ب حـ ، ا ب = حـ ى

البرهان - △ ا ب حـ = ا حـ ى ومن تساويهما ينتج

ا ى = ب حـ ، ا ب = حـ ى

(٣) المطلوب اثباته - ∠ ب = ∠ ى ، ∠ ب ا ى = ∠ ب حـ ى

البرهان - يستنتج من (ا) ،،

(٤) المطلوب اثباته - م تنصف كل من ا حـ ، ب ى (س ٦٢)

البرهان = △ ا م ى = △ ب م حـ

ومن تساويهما ينتج ا م = م حـ ، ب م = م ى وهو المطلوب

١١٦ فرع (١) المستقيمات المتوازية المحصورة بين متوازيين كلها متساوية

(شكل ٦٣)

تعريف - بعد المستقيمين المتوازيين هو العمود النازل من نقطة من احدها على الآخر

(شكل ٦٤)

١١٧ فرع (٢) المتوازيان على بعد واحد فى جميع امتدادهما

نظريه ٣٠

(بعضها عكس بعض المتقدمة)

١١٨ الشكل الرباعى يكون متوازى الأضلاع

(١) اذا كان كل ضلعين متقابلين منه متساويين

(٢) « « زاويتين متقابلتين منه متساويتين

(٣) « « ضلعان متقابلان منه متساويين ومتوازيين

(٤) « « كل قطر منه ينصف الآخر

(١) المفروض - الشكل الرباعى اب حـ ء فيه

ا ء = ب حـ ، ا ب = ء حـ

المطلوب اثباته اب حـ ء متوازى أضلاع

(شكل ٦٥)

البرهان - عند القطر اھ فيحدث ∆ ا ب ھ ≡ ∆ ا ھ ء (٨٢)

ومن تساويهما ينتج ∠ م = ∠ ھ ، ∠ و = ∠ ه

اذن ا ب ∥ ء ھ ، ا ء ∥ ب ھ (٥٥) وهو المطلوب

(٢) المفروض - الشكل الرباعى ا ب ھ ء

فيه ∠ ا = ∠ ھ ، ∠ ب = ∠ ء

(شكل ٦٦)

المطلوب اثباته - ا ب ھ ء متوازى أضلاع

البرهان - ∠ ا = ∠ ھ فرضاً

∠ ب = ∠ ء „

يجمع

∠ ا + ∠ ب = ∠ ھ + ∠ ء

ومن حيث أن مجموع زوايا الشكل الرباعى انقسم الى قسمين متساويين

فيكون كل قسم منهما يساوى قائمتين أى أن

∠ ا + ∠ ب = ٢ ق

ويكون ا ء ∥ ب ھ وبالمثل ا ب ∥ ء ھ (٥٥)

اذن ا ب ھ ء متوازى أضلاع

(شكل ٦٧)

المفروض - الشكل الرباعى ا ب ھ ء

فيه ا ء ∦ ب ھ

المطلوب اثباته - ا ب ﺣ ء متوازى أضلاع

البرهان - نمد القطر ا ﺣ فيحدث Δ ا ب ﺣ = Δ ا ﺣ ء (٧٧)

ومن تساويهما ينتج ∠ ﻫ = ∠ م فيكون ا ب ‖ ء ﺣ (٥٥)

(٤) المفروض الشكل الرباعى ا ب ﺣ ء فيه نقطة م تنصف كلاً من ا ﺣ و ب ء

المطلوب اثباته - ا ب ﺣ ء متوازى أضلاع

(شكل ٦٨)

البرهان - Δ ا م ء = Δ ب م ﺣ (٧٧)

ومن تساويهما ينتج ∠ ﻫ = ∠ و ، ا ء = ب ﺣ

فيكون ا ء ‖ ب ﺣ اذن ا ب ﺣ ء متوازى اضلاع وهو المطلوب

١١٩ فرع - المعين والمربع والمستطيل كل منها متوازى أضلاع

تمرينات

١٣٥ قطرا المستطيل متساويان

١٣٦ ارسم مستطيلا طوله ٤ سنتيمتر وعرضه ٣ سنتيمتر وقس قطره

١٣٧ قطرا المربع متعامدان ومتساويان وكل منهما ينصف الآخر

١٣٨ قطرا المعين متعامدان وكل منهما ينصف الآخر

١٣٩ ارسم مربعا معلوما أحد قطريه

١٤٠ ارسم معينا معلوما قطراه

١٤١ ارسم معينا معلوما أحد قطريه وأحد أضلاعه

١٤٢ ارسم شبه منحرف بمعلومية أضلاعه

نظريه ٣١

١١٧ المستقيم الواصل بين منتصفى ضلعى مثلث يكون موازيا للثالث ويساوى نصفه

المفروض ـ مثلث ا ب حـ فيه ء هـ واصل بين منتصفى الضلعين ا ب ، ا حـ

(شكل ٦٩)

المطلوب اثباته
(١) ء هـ ‖ ب حـ
(٢) ء هـ = $\frac{\text{ب حـ}}{٢}$

(١) ، (٢) البرهان نمد هـ ء على استقامته ونأخذ عليه البعد هـ و = ء هـ ثم نوصل و حـ فيحدث △ ا ء هـ = △ هـ حـ و (٧٧)

ومن تساويهما ينتج حـ و = ا ء = ء ب

د وهـ = د ا

ومن هذه المتساويات يعلم لنا ان ء ب ‖‖ حـ و

اذن ء حـ ب و متوازى أضلاع وعليه يكون ء هـ ‖ ب حـ

ومن حيث ان ء هـ = $\frac{\text{ء و}}{٢}$ يكون

ء هـ = $\frac{\text{ب حـ}}{٢}$ وهو المطلوب

نظرية ٣٢

١١٨ اذا مد مستقيم من منتصف ضلع مثلث موازيا لاحد الضلعين الآخرين يتلاقى مع الثالث فى منتصفه ويساوى نصف موازيه

المفروض ا ب حـ مد من ء منتصف ا ب ، ء هـ ‖ ب حـ

(شكل ٧٠)

المطلوب اثباته
(١) ء هـ ينصف ا حـ
(٢) ء هـ = $\frac{\text{ب حـ}}{٢}$

البرهان ان لم تكن نقطة هـ منتصف ا حـ كانت نقطة أخرى مثل و هى منتصفه وعليه يكون و ء ‖ ب حـ (١١٧) وهو خلف نشأ من عدم التسليم بان هـ فى منتصف ا حـ اذن نقطة هـ فى منتصف ا حـ

ويكون أيضا ء هـ = $\frac{\text{ب حـ}}{٢}$ (١١٧)

تمرينات

١٤٣ احدى زوايا مثلث تساوى نظيرتها من آخر وكل من الضلعين المحيطين بها ضعف نظيره من الثانى اثبت ان الضلع الثالث من الاول ضعف نظيره من الثانى

١٤٤ اب حـ ء متوازى أضلاع ونقطتا هـ ، و منصفا الضلعين اب ، حـ ء اثبت أن المستقيمين او ، حـ هـ يقسمان القطر ب ء الى ثلاثة أقسام متساوية

١٤٥ منصفات المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة تقسم كلا منها الى قسمين احدهما ضعف الآخر

١٤٦ تمرين هام - منصف المثلث القائم الزاوية الممدود من رأس القائمة يساوى نصف وترها

١٤٧ فى المثلث اب حـ مد الارتفاعان ا ء ، ب هـ اثبت أن منصف اب على بعدين متساويين من نقطتى ء ، هـ

عمليه ١١

١١٩ المطلوب تقسيم مستقيم معلوم الى اجزاء متساوية

المفروض - مستقيم ال والمطلوب تقسيمه الى اقسام متساوية ولتكن خمسة أقسام مثلا

(شكل ٧١)

العمل - نمد من ا مستقيما غير محدود ونأخذ عليه خمسة أبعاد متساوية اياكانت ولتكن اب ، ب حـ ، حـ ء ، ء هـ ، هـ و

ثم نوصل ول ثم نمد من ب ، ه ، ء ، هـ

موازيات للمستقيم ول فتعين على ال خمسة أقسام متساوية

البرهان - نمد من احدى نقط تقاسيم او موازيا للمستقيم ال ولتكن

حم فيكون △ حـ ء م = △ ا ب س (٧٨) وعليه

حم = اس وبما أن حـ م = ص ط (٧٨١) ينتج اس =

ص ط وبالمثل نثبت تساوى باقى الأقسام

تمرينات

١٤٨ اقسم مستقيما الى قسمين أحدهما ٢/٥ الآخر

١٤٩ ارسم مثلثا متساوى الأضلاع معلوما محيطه

١٥٠ ارسم مثلثا متساوى الساقين بحيث يكون محيطه يساوى مستقيما معلوما وقاعدته تساوى نصف احد ساقيه

نظرية ٣٣

١٢٠ اذا اقيم عمود على مستقيم من منتصفه

(١) فكل نقطة من العمود تكون على بعدين متساويين من نهايتي المستقيم

(٢) كل نقطة خارجة عن العمود تكون على بعدين مختلفين من نهايتي المستقيم واكبرهما ما كان قاطعا للعمود

(١) المفروض - مستقيم ا ب ، حـ ء عمود مقام عليه من منتصفه

المطلوب اثباته - ء ا = ء ب

البرهان - △ ء ا حـ = △ ء حـ ب

ومن تساويهما ينتج ء ا = ء ب وهو المطلوب

المفروض - ا ب ، حـ ء عمود عليه من وسطه

ونقطة هـ خارجة عن هذا العمود

المطلوب اثباته - هـ ب > هـ ا

البرهان - نمد و ب فينتج و ا = و ب (١) من هذه النظرية

وفي المثلث هـ ب و : هـ ب > هـ و + و ب

أو هـ ب > هـ و + و ا

هـ ب > هـ ا وهو المطلوب

نظريه ٣٤ عكس المتقدمة

١٢١) (١) كل نقطة على بعدين متساويين من نهايتى مستقيم تكون احدى نقط العمود المقام عليه من منتصفه

(٢) كل نقطه على بعدين مختلفين من نهايتى مستقيم تكون خارجة عن هذا العمود (شكل ٧٣)

ﺣ

ب ء ا

(١) المفروض - مستقيم ا ب ، ﺣ ا = ﺣ ب

المطلوب لاثباته - ﺣ إحدى نقط العمود المقام من منتصف ا ب

البرهان - نوصل من ﺣ الى ء منتصف ا ب فيحدث

Δ ا ﺣ ء = Δ ﺣ ء ب (٨٢)

وعلى تساويهما تتساوى زاويتى ء ويكون ﺣ ء عمودا على ا ب

اذن نقطة ﺣ هى إحدى نقط العمود المقام من منتصف ا ب عليه وهو المطلوب (شكل ٧٤)

(٢) المفروض - نقطة ﺣ على بعدين مختلفين من نهايتى ا ب أعنى ﺣ ا > ﺣ ب

ﺣ

ب ا

المطلوب اثباته - ﺣ ليست على العمود المقام على ا ب من منتصفه

البرهان - اذا كانت ﺣ على العمود المقام على ا ب من منتصفه لوجب ان يكون

حـ ا = حـ ب (١٢٠) وهذا خلف

إذن نقطة حـ خارجة عن هذا العمود وهو المطلوب

نظريه ٣٥

١٢٢ (١) كل نقطة من منصف زاوية تكون على بعدين متساويين من ضلعيها

(٢) كل نقطة خارجة عن هذا المنصف تكون على بعدين مختلفين من ضلعي الزاوية وأكبرهما ما كان قاطعاً للمنصف

المفروض - نقطة ب على منصف د حـ ا ء

المطلوب اثباته - ب حـ (العمود على حـ ا) = ب ء (العمود على ء ا)

البرهان - ∆ ا ب حـ = ∆ ا ب ء (٧٩) ومن تساويهما ينتج ب حـ = ب ء وهو المطلوب

(٢) المفروض - نقطة حـ خارجة عن منصف ذ وا هـ

المطلوب اثباته حـ و العمود على ا و > حـ هـ العمود على ا هـ

البرهان - ننزل ب ع عموداً على ا هـ ثم نوصل ع حـ

فيكون حـ ع < ع ب + ب حـ (٨٨)

لكن ع ب = و ب (١٢٢)

اذن حـ ع < و ب + ب حـ
و حـ

أو حـ ع < و حـ وحيث ان حـ هـ < حـ ع ينتج حـ هـ < و حـ
(وهو المطلوب)

نظرية ٣٦ عكس المتقدمة

١٢٣ (١) كل نقطة على بعدين متساويين من ضلعي زاوية تكون على منصفها

(٢) كل نقطة على بعدين مختلفين من ضلعي زاوية تكون خارجة عن منصفها

(١) المفروض - ب هـ (⊥ هـ ا) = ب ء (⊥ ء ا)

المطلوب اثباته - ب على منصف ∠ هـ ا ء

البرهان - نوصل ا ب فيحدث

∆ ا هـ ب = ∆ ا ب ء (٨٣)

(شكل ٧٦)

ومن تساويهما ينتج ∠ ٢ = ∠ ٣ أي أن نقطة ب على منصف

∠ هـ ا ء وهو المطلوب

(٢) المفروض - ب هـ (⊥ هـ ا) > ب ء (⊥ ء ا)

المطلوب اثباته - نقطة ب ليست على منصف ∠ ا (شكل ٧٧)

البرهان - لو كانت ب على منصف ∠ ا لوجب

أن يكون هـ ب = ب ء (١٢٢) وهو خلف

اذن نقطة ب ليست على منصف ∠ ا وهو المطلوب

(تمرين هام)

١٥١ منصفات زوايا المثلث تتقاطع في نقطة واحدة

المسار الهندسى (المحل الهندسى)

١٢٤ المسار الهندسى لنقطه هو الخط الذى يتولد عنها اثناء سيرها مقيدة بشرط أو جملة شروط معينة

أمثلة

(أ) اذا سارت نقطة وهى حافظة لبعد معين بينها وبين نقطة ثابتة (ش ٧٨) تولد عنها خط منحن (محيط دائرة) يسمى مسارها الهندسى

(ب) المسار الهندسى للنقطة التى على بعدين متساويين (ش ٧٨) من نقطتين ثابتتين هو العمود المقام من منصف المستقيم الواصل بينهما (راجع نظرية ٣٤) (شكل ٧٩)

المسار الهندسى للنقطة التى على بعدين متساويين من ضلعى زاوية هو المستقيم المنصف لهذه الزاوية (راجع نظرية ٣٦) (شكل ٨٠)

تقاطع المسارات الهندسية

(تمهيد) - تقاطع المسارات الهندسية بعضها مع بعض يوصلنا الى حل كثير من المسائل الهندسية وكذا تقاطعها مع خطوط اخرى واليك المثال

١٢٥ عين نقطة على مستقيم معلوم بحيث تكون على بعدين متساويين

على ضلعى زاوية معلومة

المفروض ـ د ا ب حـ والمستقيم ء هـ والمطلوب نقطة من ء هـ تكون متساوية البعدين عن ا ب ، ب حـ

الحل ـ تقدم أن المسار الهندسى للنقط المتساوية البعدين عن ضلعى زاوية هو المستقيم المنصف لها اذن النقطة المطلوبة لابد ان تكون احدى نقط المنصف لزاوية ا ب حـ وأيضا النقطه عينها يلزم ان توجد على هـ ء حسب منطوق السؤال فلاجل ايجاد النقطة المذكورة نمد منصف د ا ب حـ حتى يقابل ء هـ فى و فتكون نقطة و هى المطلوبة

(ش ٨١)

(تنبيـه) اذا كان ء هـ يوازى المنصف تكون المسئله عديمة الحل

(تمرينات على المسار الهندسى)

١٥٢ عين المسار الهندسى للنقطه التى تكون على بعد معين من مستقيم معلوم

١٥٣ عين المسار الهندسى للنقطة التى تكون على بعدين متساويين من مستقيمين متوازيين

١٥٤ ماهو المسار الهندسى لمنتصف مستقيم واصل من نقطة معلومة الى مستقيم معلوم

١٥٥ ماهو المسار الهندسى لراس الزاوية القائمة من مثلث قائم الزاوية وتره ثابت

١٥٦ ماهو المسار الهندسى لمركز دائرة ملاصقة لاخرى ومتحركه حولها

١٥٧ ماهو المسار الهندسى لمنتصف مستقيم متحرك ومتكئ بنهايتيه على مستقيمين متعامدين

١٥٨ عين المسار الهندسى للنقطه التى مجموع بعديها عن ضلعى زاوية يساوى مستقيما معلوما

تمرينات على تقاطع المسارات الهندسية

١٥٩ عين نقطه على مستقيم معلوم بحيث تكون متساوية البعدين عن نقطتين معلومتين خارجتين عنه

١٦٠ عين نقطه على مستقيم بحيث يكون بعداها عن مستقيمين اخرين متقاطعين متساويين

١٦١ المطلوب ايجاد نقطة تكون متساوية البعدين عن نقطتين معلومتين وعلى بعد معين من مستقيم معلوم

١٦٢ المطلوب ايجاد نقطه تكون متساوية البعدين عن نقطتين معلومتين وكذا عن مستقيمين متوازيين

١٦٣ المطلوب ايجاد نقطة تكون متساوية البعدين عن نقطتين معلومتين وكذا عن مستقيمين متقاطعين

١٦٤ عين نقطة داخل زاوية تكون على بعد معلوم من كل من ضلعيها

١٦٥ عين نقطه تكون متساوية الابعاد عن أضلاع مثلث

١٦٦ عين نقطه تكون متساوية الابعاد عن رءوس مثلث

١٦٧ عين نقطه على مستقيم يكون بعدها عن نقطة خارجة عنه يساوى مستقيماً معلوماً

(تمرينات عمومية)

١٦٨ العمودان النازلان على قطر متوازى أضلاع من الزاويتين المقابلتين لهذا القطر يكونان متساويين

١٦٩ كل مستقيم واصل بين منصفى ضلعين من مثلث ينصف كل مستقيم واصل بين نقطة من الضلع الثالث ورأس الزاوية المقابلة له

١٧٠ كل مستقيم يمر بمنصف قطر متوازى أضلاع وينتهى بضلعين منه يكون منصفاً بهذا القطر

١٧١ زاويتا القاعدة من شبه منحرف متساوى الساقين متساويتان وكذا

قطراه متساويان

١٧٢ اذا كانت الزاويتان المجاورتان لاحدى قاعدتى شبه منحرف متساويتين تكون الزاويتان المجاورتان للقاعدة الاخرى متساويتين أيضا ويكون شبه المنحرف متساوى الساقين

١٧٣ اذا كانت القاعدة العليا من شبه منحرف متساوى الساقين تساوى مجموع ضلعيه غير المتوازيين فالمستقيمان الواصلان من منتصفها الى نهايتي القاعدة السفلى يقسمان الشكل الى ثلاثة مثلثات كل منها متساوى الساقين

١٧٤ الزاوية الخارجة عن مسدس منتظم تساوى كل زاوية من مثلث متساوى الاضلاع

١٧٥ اذا كان احدى قطرى شكل رباعى ينصف زاويتي الشكل يكون عمودا على القطر الآخر

١٧٦ قطرا المعين غير متساويين

١٧٧ اثبت ان الزاوية الحادثة من تقابل منصفى زاويتين متقابلتين من شكل رباعى تساوى نصف مجموع الزاويتين الاخريين

١٧٨ اثبت انه اذا مد الضلعان ب ا ، حـ د من الشكل الرباعى ا ب حـ د حتى تقابلا فى هـ يكون محيط المثلث هـ ب حـ اكبر من محيط ا ب حـ د

١٧٩ اذا كان ا ب حـ ء شكلا رباعياً فيه د ب = د ء ومدّ الضلعان
ا ب ، ء حـ حتى تقابلا فى هـ وكذا الضلعان ا ء ، ب حـ حتى
تقابلا فى و . فاثبت ان د هـ = د و

١٨٠ المستقيمات الواصلة بين منصفات كل ضلعين متجاورين من
معين تكوّن مستطيلاً

١٨١ كل مستقيم يمر بمنصف احد قطرى متوازى أضلاع يقسم
متوازى الاضلاع الى قسمين متساويين

١٨٢ الشكلان الرباعيان يكونان متساويين اذا كان فى احدهما ثلاث
زوايا وضلعا احداها مساوية لنظائرها من الآخر

١٨٣ منصفات الزوايا الخارجة من مستطيل تكوّن مربعًا

١٨٤ منصفات زوايا متوازى الأضلاع تكوّن مستطيلاً

١٨٥ منصفات زوايا الشكل الرباعى تكوّن شكلا رباعيا اخر كل زاويتين
متقابلتين منه متكاملتان

١٨٦ المستقيم الواصل من رأس مثلث الى منصف الضلع المقابل
أصغر من نصف مجموع الضلعين الآخرين

١٨٧ الشكلان الرباعيان يكونان متساويين اذا كان فى احدهما

ثلاثة أضلاع والزاويتان المحصورتان بينها مساوية لنظائرها من الآخر

١٨٨ اذا كان منصف زاوية من مثلث ينصف الضلع المقابل لها يكون المثلث متساوى الساقين

١٨٩ المستقيمات الواصلة بين منصفات كل ضلعين متجاورين من شكل رباعى تكون متوازى أضلاع محيطه يساوى مجموع قطرى الشكل الرباعى

١٩٠ اذا مدت اضلاع مخمس ليس فيه ضلعان متوازيان حتى تقابلت يكون مجموع الزوايا الحادثة من تقابلها مساويا قائمتين

١٩١ مجموع المستقيمات الواصله من رءوس شكل رباعى الى نقطة داخلة اكبر من مجموع قطريه

١٩٢ اذا كان الضلع ﺣ ب فى المثلث ا ب ﺣ اكبر من ﺣ ا ومدا على امتدادهما من جهتى ب ، ا الى ء ، ﻫ و بحيث يكون ب ء مساويا ا و فاثبت أن ﻫ ا > ء ب

١٩٣ المعلوم أن أحد ضلعى زاوية مثلث اكبر من الآخر والمطلوب اثبات ان كل مستقيم واصل من رأس الزاوية الى الضلع المقابل لها يكون أصغر من الضلع الاكبر

١٩٤ الخط المنصف لاى زاوية من مثلث مختلف الأضلاع يقسم الضلع

المقابل لها الى جزأين اكبرهما يجاور الضلع الاكبر

١٩٥ مجموع العمودين النازلين من احدى نقط قاعدة مثلث متساوى الساقين على الساقين ثابت

١٩٦ اذا كانت النقطة ء منصفة الضلع ب ﺣ من المثلث ا ب ﺣ والنقطه ﻫ منصفة الضلع ا ء ووصل ب ﻫ ومد حتى قابل ا ﺣ فى و تكون و واقعة فى ثلث ا ﺣ

١٩٧ ارسم مربعاً معلوماً مجموع ضلعه وقطر منه

١٩٨ ارسم مربعا فى مثلث متساوى الأضلاع

١٩٩ ارسم مستطيلا مع معلومية محيطه واحد قطريه

٢٠٠ اذا كان مقدار كل زاوية من مضلع منتظم ½ ١٧٦ فما عدد أضلاعه

٢٠١ ارسم مربعا فى مثلث قائم الزاوية بحيث تكون الزاوية القائمة من المثلث احدى زوايا المربع

٢٠٢ ارسم على ب ﺣ شكلا رباعيا بحيث يكون كل ضلع من الثلاثة الأضلاع نصف ب ﺣ

٢٠٣ الزوايا ا ، ﺣ ، ﻫ من المسدس ا ب ﺣ ء و ﻫ متساوية وكل منها ضعف كل من ب ، ء ، و والمطلوب ايجاد النسبة بين

زاوية ا والزاوية القائمة

٢٠٤ اذا اخذ على ضلعى الزاوية ا البعد اب يساوى البعد اء ثم البعد بـ حـ يساوى ء و ثم مد ب و ، ء حـ فتقاطعا فى نقطة م فاثبت ان نقطة م هى احدى نقط المنصف للزاوية ا

٢٠٥ كل مستقيم يقابل احد المتوازيين لابد ان يقابل الآخر

٢٠٦ اذا كانت احدى زاويتى القاعدة من مثلث متساوى الساقين تساوى $\frac{٤}{٥}$ ق فما مقدار زاوية رأسه

٢٠٧ المثلث ا ب حـ متساوى الساقين وقاعدته هى ب حـ فاذا مد حـ ا على استقامته واخذ عليه البعد اء يساوى ا حـ فبرهن على أن ء ب عمود على ب حـ

٢٠٨ اذا اخذ على قاعدة مثلث متساوى الساقين نقطه ومد منها موازيان للساقين فاثبت ان محيط المنحرف الناتج يساوى مجموع الساقين

٢٠٩ اذا كان منصف الزاوية الخارجة من مثلث يوازى احد الأضلاع يكون المثلث متساوى الساقين

٢١٠ اذا كان المستقيم ب و فى المثلث ا ب حـ منصفا د ب ، حـ ء منصفا د حـ ثم انزل من ا المستقيم اع عموديا على ء حـ وأيضا ا م عموديا على ب و فاثبت ان ع م موازٍ ب حـ

٢١١ منصفا الزاويتين اللتين أضلاعهما متوازية يكونان متوازيين أو متعامدين

٢١٢ المستقيم الواصل بين منصفى الضلعين غير المتوازيين فى شبه المنحرف يكون موازيا لكل من القاعدتين ويساوى نصف مجموعهما

٢١٣ فى كل شبه منحرف متساوى الساقين الزاويتان المتقابلتان متكاملتان

٢١٤ العمودان المقامان على منصفى ضلعى القائمة يتقاطعان فى منصف الوتر

٢١٥ اذا كان المثلث ا ب حـ حاد الزاوية فى ا فان منصف المثلث المرسوم من ا يكون اكبر من نصف القاعدة ب حـ

٢١٦ فى اى مثلث ا ب حـ اذا رسم منصف المثلث من ا ونصف الضلعان ا ب ، ا حـ بنقطتين ء ، هـ يكون المنصف والمستقيم ء هـ ينصف احدهما الآخر

٢١٧ فرق بعدى اى نقطة من امتداد قاعدة مثلث متساوى الساقين عن الساقين يساوى كمية ثابتة وهى العمود النازل من احدى رأسى القاعدة على احد الساقين

٢١٨ ارتفاعات المثلث المتساوى الاضلاع متساوية

٢١٩ كل نقطة داخل مثلث متساوى الاضلاع يكون مجموع ابعادها

عن الاضلاع يساوى كمية ثابتة وهى ارتفاع المثلث المتساوى الاضلاع

٢٢٠ منصفا ضلعين غير متجاورين من شكل رباعى ومنصفا قطريه تكون متوازى أضلاع

٢٢١ المعلوم نقطتان داخل زاوية والمطلوب ايجاد أقرب خط منكسر ينتهى بالنقطتين ويمر بضلعى الزاوية

٢٢٢ منصف المثلث الواصل الى الضلع الاكبر أصغر من منصف المثلث الواصل الى الضلع الاصغر

٢٢٣ اذا وصل بين منصفات أضلاع أى شكل رباعى فمتوازى الأضلاع الناتج تكون مساحته تساوى ½ مساحة الشكل الرباعى المعلوم

٢٢٤ اذا مدت أضلاع المسدس المنتظم غير المجاورة على استقامتها يتكون من ذلك مثلث متساوى الاضلاع

٢٢٥ اذا اخذت فى المربع ا ب حـ ء الابعاد او = ءهـ = حـ ل = م ب فاثبت أن وم لهـ مربع

٢٢٦ اذا كان العمودان النازلان من رأسى مثلث على ضلعين منه متساويين يكون المثلث متساوى الساقين

٢٢٧ اذا كان فى الدائرة م قطران متعامدان ا ب ، ء حـ ثم من نقطة هـ اقيم

العمود هو و على م ى وقابل المحيط فى و ثم من نقطه و ازل العمود
وع على ا ب فاثبت ان هع = داعا نصف القطر مهما كان محل هـ
٢٢٨ اذا مدت منصفات الزوايا الاربع فى شبه المنحرف ا ب حـ ى
فتقاطع كل اثنين فى نقطة فاثبت ان المستقيم الواصل الى نقطتى
التقاطع يوازى القاعدتين وعلى بعدين متسا وبين منهما
٢٢٩ المعلوم شكل رباعى فيه كل زاويتين متقابلتين متكاملتين اثبت انه
اذا مد كل ضلعين متجاورين منه الى ان يتقابلا يكون منصفا الزاويتين
الحادثتين من تقابلها متعامدين
٢٣٠ المعلوم متوازى أضلاع ا ب هـ ى مد من راسه ب مستقيم
مواز لقطره ا حـ وانزل من نقطه ى عمود ى هـ على هذا الموازى
فقابل ب حـ فى و فاثبت أن اهـ ينصف ب و
٢٣١ اذا كان منصفا زاويتين من مثلث متساويين يكون المثلث متساوى
الساقين
٢٣٢ ارسم شبه منحرف بمعلومية قاعدتيه وقطريه
٢٣٣ المعلوم مثلث ا ب حـ مدا رتفاعاه ا ى ، حـ هـ فتقابلا فى و فاثبت انه اذا
مد ا ى بمقدار ىع يساوى و ى ووصل حـ ع تكون د ب = دع

تعبير ثانٍ لاثبات نظرية ٦

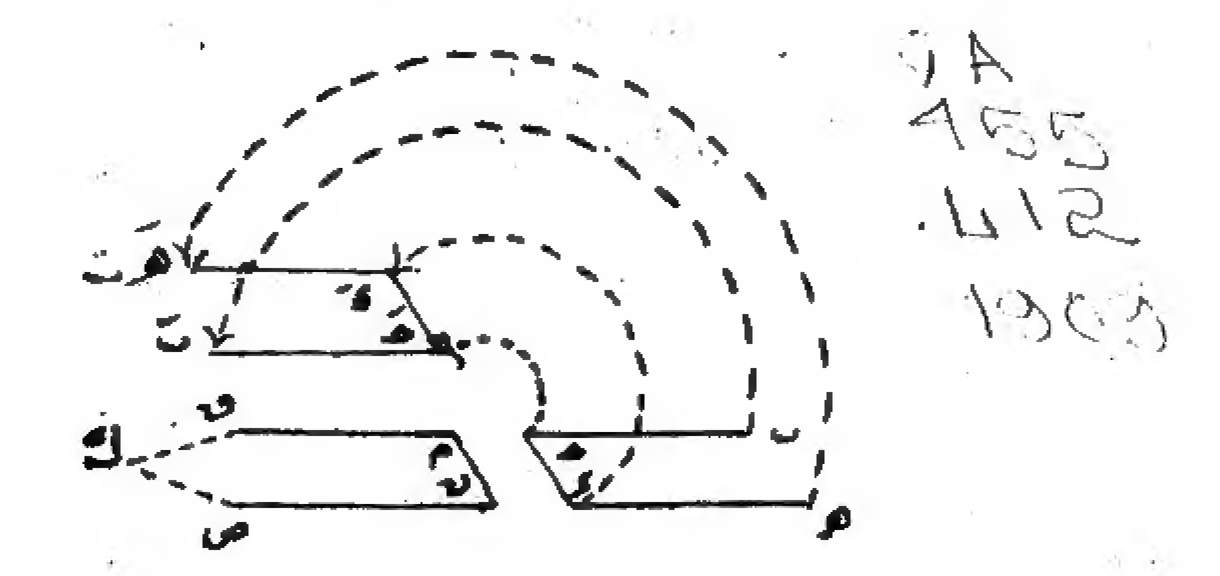
البرهان - من حيث ان د هـ = د ﻫ فيكون (٤٨) د م = د ى

ان لم يكن ب و ‖ هـ ص (ش ١٦) لكانا متلاقيين وتلاقيهما لا يكون الا من جهة واحدة اذ لو تلاقيا من الجهتين لصارا مستقيماً واحداً (٥٤) وهو خلف للفرض

فنفرض انهما تلاقيا من جهة اليسار فى نقطة مثل ك

ثم نتصور فصل الجزء ب حـ ى هـ من ك و م ﻫ ص كما فى الشكل الآتى

(ش ١٦)



ثم ندير ب حـ ى هـ فى اتجاه الاسهم الى ان يأخذ وضعا مثل هَ ىَ حَ بَ وبعد ذلك نطبق هذا الأخير على و م ﻫ ص بان نطبق اولاً المستقيم ىَ حَ على مساويه م ﻫ بحيث تقع ىَ على م و حَ على ﻫ

ومن حيث ان دَ ىَ = د ى = د م فالخط ىَ هَ ينطبق على م و ويأخذ اتجاهه وبالمثل ينطبق حَ بَ على ﻫ ص ويأخذ اتجاهه وعلى ان م و و ﻫ ص متلاقيان فى ك فالمستقيمان ىَ هَ و حَ بَ (اللذان هما ى هـ و حـ ب) مثلهما يتلاقيان ايضا فى نقطة مثل ل



وعلى ذلك يكون امكن مد مستقيمين بين نقطتى ل و ك وهو خلف (٥٤)

اذن ب و ‖ هـ ص وهو المطلوب